

数学概論 A(ベクトル解析) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

No. 5 (2001年5月15日) の分

問. 発散がまったくわかりませんでした.

答. こんにちは. 来週(5月29日)は出張のため休講にします. ところで, この前の日曜日の「知ってるつもり」を見ましたか? 三波春夫先生の特集でしたね. さて, 回答ですが, とにかく, 1次元のとき $\operatorname{div} v = \frac{dv}{dx}$, 2次元のとき $\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}$, 3次元のときは, $\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$ がベクトル場の発散の定義であることをまず押さえましょう. そして, 以下の問答を読むと, だんだんわかってくると思います.

問. $\operatorname{div} v$ は, 水で言えば, どういった量なのでしょう?

答. 湧出量です. $\operatorname{div} v$ は, スカラー場ですが, 各点で, その地点での湧き出し量(負の場合は, 吸い込み量)を表します. それをある領域の上で積分すると, その領域でのトータルな湧き出し量(負の場合は, 吸い込み量)が得られる仕組みです.

問. $v(x+\Delta x) - v(x) = \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial v}{\partial x} dx \doteq \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$ としたのは危険ではないでしょうか? もっと, 厳密な証明をしてほしいのですが. 2次元の場合も, 積分の形で証明してください.

答. そうですね. ここでは, 直感的に発散の定義の気持ちをお納得してもらうために持ち出したことなので, はじめから何も証明していません. 別に危険という程のことはないと思いますが, 正確に書くと, 平均値の定理から, $v(x+\Delta x) - v(x) = \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial v}{\partial x}(x) dx = \frac{\partial v}{\partial x}(c) \Delta x$, ただし, c は x と $x+\Delta x$ の間にある点, ということになります. (微分積分の復習). 2次元の場合は, $\{v_1(x+\Delta x, y) - v_1(x, y)\} \Delta y + \{v_2(x, y+\Delta y) - v_2(x, y)\} \Delta x = \left\{ \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial v_1}{\partial x} dx \right\} \Delta y + \left\{ \int_y^{y+\Delta y} \frac{\partial v_2}{\partial y} dy \right\} \Delta x = \frac{\partial v_1}{\partial x}(c_1, y) \Delta x \Delta y + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, c_2) \Delta x \Delta y$ が湧き出した量なので, 単位面積あたりの湧出量は, $\Delta x \Delta y$ で割ってから, $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ とすればよいのですが, そのとき, $c_1 \rightarrow x, c_2 \rightarrow y$ なので, $\lim \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}(c_1, y) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, c_2) \right) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y)$ が, 湧出量(あるいは発散ともよぶ)の定義として採用されたわけです.

問. 単位長さ当たりの湧出量が $\frac{dv}{dx}$ になるのがわかりません.

答. 上の式から, $\frac{\partial v}{\partial x}(c) = \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$ なので, 単位長さ当たりの湧出量とみなされます(1次元の場合).

問. 発散のイメージがわかりません. 求め方が速度の微分のため, どうしても加速度との違いを考えてしまいます. 加速度の場合は時間微分, 湧出量の場合は位置で微分, という違いはありますが, 同じものと解釈しました.

答. $f(t, x)$ が直線上の流れ(t は時刻)を表すとします. ここで, $f(0, x) = x$ とし, $v(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, x)$ とおいたとき, $v(f(t, x)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ を満たすとします. 発散は, $\operatorname{div} v = \frac{dv}{dx}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(0, x)$ ですね. たとえば, $f(t, x) = xe^{t^2}$ とすると, $v(x) = x$ であり, $\operatorname{div} v = 1$ です. ちなみに, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(0, x) = x \neq 1$ です. 違いのあるものを同じものと解釈しては いけません.

問. わき出しのイメージってどんなですか? 校庭のスプリンクラーがピュッピュッと水をまくようなものか, 水の源流でこんこんと湧きだす感じか, 水道管が破裂してふきだしているようなものなのか, 計算して答を出すと, どのようなものがイメージできるのですか? 僕には, すいこみのイメージは, 水洗トイレを流すのと, 風呂の水を抜くときくらいしか「吸い込み」の感じがしません.

答. 水の源流でこんこんと湧きだす, それが途中で川底にしみ込んでいく, というのはどうでしょう.

問. 発散の例で, $v = \frac{Q}{2\pi r} \mathbf{1}$ より, $\mathbf{v} = \frac{Q}{2\pi r^2} \mathbf{r}$ となったのは, \mathbf{v} の方向と \mathbf{r} の方向が同じものと考えられるからですか?

答. その通りです.

問. 連続の方程式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$ は, どのようなところが「連続」なのですか? 考えている物(平面, 立体)から, (単位時間に出ていく質量)と(単位時間に増加する質量)との和が0になるのを, つまりは, 表面上で何ら変化がないように見えるから連続なのですか?

答. 質量保存の方程式と呼んでもよいものですね. 命名の由来は知りませんが, 関数が連続, という場合の連続とは意味合いが違います.

問. $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ の絶対値と $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$ の絶対値が等しいであろうことは分かるのですが, 私には $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$ と感じます. $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$ であるのはどうしてか, 教えてください.

答. $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$ がプラスということは, その地点から質量が逃げていくので, 質量が保存されるためには, そこでの密度が減少しなければならない, つまり, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ が負になります.

問. $\rho \Delta x \Delta y$ で ρ は密度ということですが, これを単位体積あたりの質量と考え, $[ML^{-3}]$ で, 長さで割ったものが残ってしまいますが, この場合 ρ を単位面積あたりの質量として密度と考えるべきなのでしょう?

答. 2次元の場合は, ρ を単位面積あたりの質量として密度と考えていました. 3次元の場合は, 厚さが1と考えて, 厚味の方向には一様であるとしてください.

問. 連続の方程式に出てくる $\rho \mathbf{v}$ の解釈ですが, 「単位面積あたりの質量の流れ」というのは, 少しおかしいような

気がします。

答。「単位面積あたりの質量で重みをつけた流体の速度ベクトル」ですか。

問．連続の方程式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$ の意味あいについて、水の流れではわかりづらかったので、車の流れで考えてみました。(車の量が密度で車の速度が速度)。この場合、わきだしなしというのは、車の台数が変わらないということですね。それで、 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ が正のとき、つまり、車のスピードがおちて間隔がせまくなると、 $\text{div}(\rho \mathbf{v})$ が負で、車の通る量が少なくなるという考え方でいいんでしょうか？

答．大変よいと思います。

問．連続の方程式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$ は、たとえば、石油のパイプラインを作ったりするときにも使われるのですか？

答．なるほど。石油が途中で漏れてはいけませんからね。でも石油の場合は、 ρ は定数と考えてよいと思います。

問． devv がわき出し吸い込みの程度を表しているのであれば、わき出し吸い込みなしの条件は $\text{devv} = 0$ で済み、連続の方程式は必要ないと思います。

答． devv は、密度の変化しない流体のわき出し吸い込みの程度を表していると考えないと納得できると思います。

問．divergence はどうして線形性をもてるのですか？

答．証明できるからです。たとえば、2次元の場合、 $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2)$ に対して、 $\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{\partial(A_1 + B_1)}{\partial x} + \frac{\partial(A_2 + B_2)}{\partial y} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial B_2}{\partial y} = \text{div} \mathbf{A} + \text{div} \mathbf{B}$ となります。

問． divv は4次元以上の一般のベクトル \mathbf{v} に対しても定義できますか？ divv は、純粋に数学的には何を意味しているのですか？

答．定義できます。 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ のとき、 $\text{divv} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$ が定義です。数学的には、もちろんこれだけの意味ですが、実は、 $(n-1)$ 次微分形式の外微分と考えると、自然にとらえられます。

問．勾配と発散はどのような関係にあるのですか？

答．スカラー場の勾配とベクトル場の発散に、直接的な関係はありませんが、これらを組み合わせ使います。たとえば、ラプラシアンや、これから説明する予定の「ガウスの発散定理」などです。

問．ラプラシアン Δ は $\text{div}(\text{grad})$ なので、勾配の湧出量ということになるとは思いますが、何を意味するのか全然わからないので、物理的な例で解説してほしいです。

答．ラプラス方程式に現れます。ラプラス方程式は $\Delta U = 0$ という方程式です。 $U = U(x, y, z)$ に関する方程式です。たとえば、 U が静電のポテンシャルとすると、静電力のベクトル場 $\mathbf{E} = -\text{grad}U$ の湧き出しがない、という条件が、 $\Delta U = 0$ となります。

問． $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi$ になる理由がわかりません。

答． $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ は x に関する2階偏微分なので、 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi$ です。

問．"div" と ∇ は、違いはないということですか？講義中にも、"div" = ∇ と形式的に表すことができるとありましたが、何か違いでもあるのですか？

答．"div" = ∇ と形式的に表すことができる」とは言っていません。「 $\text{divv} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ と形式的に表すことができる」と言いました。必ず、ベクトル場と組み合わせセットで使いましょ。単独使用禁止。抱き合わせ商法です。

問． $\text{grad}f$ や $\text{div} \mathbf{A}$ はそれぞれ ∇f や $\nabla \cdot \mathbf{A}$ のように書いて、両者はベクトルのスカラー倍、内積を表すので、 $f \nabla$ や $\mathbf{A} \cdot \nabla$ は $f \text{grad}$ や $\mathbf{A} \text{div}$ のように表記するのですか？

答．しません。 $f \nabla$ や $\mathbf{A} \cdot \nabla$ と書きません。ベクトルのスカラー倍や内積ではないからです。 ∇f や $\nabla \cdot \mathbf{A}$ はあくまで形式的な記号で、これを入れ換えたりしてはいけません。天地無用。

問．デルタとラプアシアンは同じものですか？ Δ は微小という、感覚的にとらえるものだと思っていたのですか？

答．ラプラシアンの記号としても Δ を使うということです。単なる偶然です。

問．ここでいう発散というのは、数列の発散とはまったく違うものなのでしょうか？

答．まったく違うものです。同じ言葉を使っているのは単なる偶然です。

問．前回の回答で、テイラー展開の1次の項が消える、という条件がよくわかりません。

答． $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$ という条件です。 $\text{grad}f(x_0, y_0) \neq 0$ であれば、直線を定めます。これが、等高線の接線の方程式です。

問．デルタ関数とは何ですか？これまでの講義に出てきたものでしたか、それとも微分積分をやる上での基本的な公式でしたか、教えてください。

答．はじめて出てきました。微分積分では登場しませんでした。デルタ関数は、物理学者ディラックが最初に考えたもので、正確に言うと、「関数」ではなく、「超関数」と呼ばれるものです。(それを数学的に正当化したのは、シュワルツでフィールズ賞を受賞しました)。関数は、積分するときの重み $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx$ (ここで、 $\varphi(x)$ はテスト関数) とも見なされます。つまり、各関数 φ に対し、上の積分値を対応させるような「汎関数(はんかんすう)」と考えられる。そう考えたとき、そのような対応を与えるものなら何でも、たとえ関数ではなくても考えよう、と発想を転換してみます。このとき、1次元デルタ関数 $\delta^1(x)$ は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta^1(x) dx = \varphi(0),$$

という条件で与えられる超関数です。 n 次元デルタ関数 $\delta^n(\mathbf{x})$ も同様に、

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) \delta^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{0}),$$

という条件で与えられる超関数です。ではまた。