数学概論A(ベクトル解析)質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 4 (２００１年5月８日) の分

問． 勾配の意味がよくわかりません．勾配を表すのに，なぜ偏微分を使うのですか？３次元の gradient のイメージがわきません．

答． こんにちは．最近，三波春夫の歌謡浪曲の CD を聞いています．やっぱり俵星玄蕃 (たわらぼしげんば) は何度聞いてもいいですね．さて，回答ですが，勾配 (こうばい) は，日常用語で坂道などの傾斜の度合いを表しますね．地面の高さを位置の関数で表し，$z = f(x, y)$ とします．まず，x 方向だけに f は変化して，y 方向には一定である場合を考えます．このとき，点 (x_0, y_0) と少し離れた点 $(x_0+\Delta x, y_0)$ で，どれだけ高さが上がるか，その割合は，平均変化率 $\dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ で表されますね．点 (x_0, y_0) での勾配は，したがって $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ で表されます．このとき，y 方向の勾配は 0 です．x と y 両方向の勾配を考慮するために，ベクトルで表せば，$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), 0\right)$ となります．これが，f の勾配 (ただし，f が y に依らない場合) です．f が y 方向にも変わる場合は，当然，$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ が f の点 (x_0, y_0) での勾配で，これが２次元の場合の一般形です．では，３次元の場合はどうなるでしょう？この場合は，高さの勾配は考えづらいので，たとえば,「気圧の勾配」を考えましょう．グラディエント (gradient) を英和辞典で引くと，鉄道や坂道の勾配，という意味の他に，気圧や湿度の勾配，という意味が出てきます．いま，低気圧から高気圧へ向かうベクトルを考えます．気圧は，(x, y, z) の関数 $f(x, y, z)$ で表されますね．アナロジーを働かすと，f の点 (x_0, y_0, z_0) での勾配は $(\mathrm{grad} f)(x_0, y_0, z_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$ と定義されます．

問． 勾配の向きがわかりません．

答． 関数 f の増加する方向です．

問． スカラー場の勾配がなぜ垂直になるのですか？

答． $\mathrm{grad} f$ が等高線 $f(x, y) = c$ の接線に垂直だということですが，いま，点 (x_0, y_0) を等高線 $f(x, y) = c$ の点とすると，$f(x_0, y_0) = c$ ですが，その点で，等高線 $f(x, y) = c$ に接する直線は，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$ で表されます．どうしてかというと，$f(x, y)$ の点 (x_0, y_0) でのテイラー展開をすると，$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + (x - x_0, y - y_0$の２次以上の項) となりますね．$f$ がその直線上で一番変化しないような直線，つまり等高線の接線が，テーラー展開の１次の項が消えるという条件で定まるのです．さて，この接線は，点 (x_0, y_0) を通り，法線ベクトルが，$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ である直線ですね．だから，勾配は等高線に垂直です．３変数の場合も同じです．

問．「等高面」が曲面だとまずいですか？

答． 等高面は曲面です！

問． $\mathbf{n} = \dfrac{1}{|\mathrm{grad} f|}\mathrm{grad} f$ は何を表しているのですか？

答． 単位法線ベクトルです．

問． $\mathrm{grad} f$ が曲面の法線ベクトルになっていると言っていましたが，外積とは何か関係があるのでしょうか？∇f による法線ベクトルの向きは，外積のときの右手系のような関係にあるのですか？

答． 等高面に接するベクトルを２つ適切に選べば，その外積が，$\mathrm{grad} f$ になります．そのとき，その２つのベクトルと $\mathrm{grad} f$ は右手系になります．外積の性質でしたね．

問．「保存力」は，どうして保存力という名前なんですか？

答． やはりエネルギー保存則から来ている言葉です．

問． $\mathbf{F} = \nabla U$ と $\mathbf{F} = -\nabla U$ の意味の違いは何ですか？

答． 符号の違いです．講義での説明が少しまずかったかな，と思っているのですが，とにかく，力のベクトル場が保存力とは,「ある関数の勾配として表されるベクトル場」のことである，と言いたかったのです．それが U でも $-U$ でもよいのですが，話を決めるために，$\mathbf{F} = -\nabla U$ と書くべきでした．

問． 力学の教科書では，ポテンシャルを $\mathbf{F} = -\nabla U$ と定義していたと思うのですが，$\mathbf{F} = \nabla U$ とどちらが正しいのですか？物理の授業では，ポテンシャルは U で表し，力は，ポテンシャルの低い方で向かうと習いました ($\mathbf{F} = -\nabla U$)．

答． 物理ではそう呼ぶのが慣習のようですね．それに従いましょう．

問． なぜ万有引力のとき $\mathbf{F} = -\nabla U$ となるのですか？

答． ポテンシャルの取り方の問題で，数学的には何の問題もないのですが，皆さんが混乱するといけない

ので，$\mathbf{F}=-\nabla U$ で，$U=-\dfrac{GM}{r}$ で統一しましょう．

問． 万有引力ベクトルが $\mathbf{F}=-\nabla U=-\dfrac{GM}{r^3}\mathbf{r}$ となるということは，∇U は斥力 (せきりょく) ということですか？

答． ということになりますね．$\nabla U=-\mathbf{F}$ なので．

問． 万有引力の場 $U=-\dfrac{GM}{r}$ は，各点で大きさが定まる力で，また，引力なので，力の向きも定まるので，スカラー場ではなくベクトル場とは考えないのでしょうか？

答． $U=-\dfrac{GM}{r}$ だけではスカラーなので，向きはないですね．

問． 形式的に $\mathrm{grad} f=\nabla f$ とも書く，とありましたが，∇ 自身を gradient として扱ってもよいのでしょうか？

答． 良くないですね．あくまで，$\mathrm{grad} f=\nabla f$ と，関数をつけた状態で使いましょう．

問． ナブラは ∇ ではなく，$\boldsymbol{\nabla}$ のように，ベクトル表記しなくても良いのですか？

答． そうした方がわかりやすいかも知れませんが，どちらでもよいですね．∇ は，あくまで形式的な記号であり，他のベクトルとは異なる立場にあると考えられるので，とくにベクトル表記にしないと間違いになるとは思えません．

問． $\mathrm{grad} f=\nabla f?$ と疑問符をつけたのはなぜですか？

答． この等式が疑問ということではなく，これがどうなるか計算してみよう，という意図で書きました．

問． 物質の密度分布がスカラー場なのですか？ベクトル場ではないでしょうか？

答． 密度はスカラーで表されるので，密度分布はスカラー場になります．

問．「全微分 $df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy+\dfrac{\partial f}{\partial z}dz$ が f の等高面の接平面を表す」という意味がよくわかりません．

答． f のテイラー展開 $f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)+(x-x_0,y-y_0,z-z_0$の２次以上の項) の１次の部分に注目して，$df=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)dy+\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)dz$ と表し，これを f の全微分と言う，ということは微積分を習ったときに聞いたことがあると思います．この式で，$df=0$ とおき，dx を $x-x_0$ に，dy を $y-y_0$ に，dz を $z-z_0$ に読み替えれば，接平面の方程式になります．

問． $df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy+\dfrac{\partial f}{\partial z}dz$ の dx,dy,dz とは何ですか？

答． 良い質問ですね．たとえば dx は x の全微分で,「x の無限小の変化を表す記号」ですが，現代では，(すこし難しいかも知れませんが)，dx は,「すべてのベクトルに対して，その x 方向成分を取り出す１次関数である」と解釈されています．点 (x_0,y_0,z_0) では，１次関数として，$x-x_0$ で表すことが可能ですね．

問． 講義の途中で，$\mathrm{grad} f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$ という式と，metric とは関係がある，と示唆されたような気がするのですが，それはどういう意味ですか？

答． $\mathbf{R}^3$ には，ユークリッド計量が入っているわけですが，その内積を使えば，各ベクトルに対して，他のベクトルとの内積をとることにより，双対ベクトル空間のベクトルが対応します．$(v\in\mathbf{R}^3\mapsto(u\mapsto u\cdot v)\in(\mathbf{R}^3)^*)$．このとき，$\mathbf{i}$ が dx に，$\mathbf{j}$ が dy に，$\mathbf{k}$ が dz に対応します．

問． d と ∂ の区別は何ですか？

答． 全微分と偏微分の区別です．あまり気にしなくても良いのですが，普通，区別して書くので，それに従いましょう．それとは別に (でもそれと関連して)，接ベクトルを表す記号として ∂ を用い,「余接ベクトル」を表す記号として d を用います．

問． 複素数の微分について教えてください．偏微分や勾配といった概念は存在するのでしょうか？

答． 存在します．ここでは，実変数で複素数値の関数 $f(t)$ の微分の説明だけしておくと，それは，複素数 $f(t)$ を実数部と虚数部に分け，それぞれを t で微分するというものです．あとは複素関数論でいう微分がありますが，ここでは説明しません．

問． 例題のほとんどが物理になっているのはどうしてですか？ベクトルは物理のためにあるということでしょうか？

答． 例題は講義でやっていないので,「例」のことですね．ベクトル解析は，数理物理学の研究から１９世紀に開発されたので，物理と仲がよいわけです．でももちろん物理以外への応用もたくさんあります．

問． 特に疑問に思ったことがなかった場合はどうすればいいのですか？前回の授業の内容の質問でもよいのですか？

答． もちろん良いです．講義内容に関する質問であれば，何でも結構です．授業と直接関係しなくても，たとえば授業を聞いているうちに連想したことでも構いません．ところで，講義を聞いて疑問に思うことがまったくない，などということがあり得るのかな？何らかの疑問は自然にわきますよね．それはともかく,「講義中寝てなかったよ」ということをアピールするためにも，どしどし質問してください．ではまた．