数学概論 A(**ベクトル解析**) **質問の回答**　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 3 (２００１年５月１日) の分

問． 行列の微分はわざわざ公式を作らないといけないほど大切なものでしょうか？

答． こんにちは．ゴールデンウィークは近所のユニクロに行きました．さて，回答ですが，大切なものです．ここでは，微小回転の形を決めるために使いましたが，他にもいろいろな応用があります．たとえば，古典力学でなくても，量子力学でも，行列の微分がないと話になりませんね．

問． 積の微分公式 $\dfrac{d}{dt}\{A(t)B(t)\} = \dfrac{dA}{dt}B + A\dfrac{dB}{dt}$ で，$\dfrac{dA}{dt}$ と B, A と $\dfrac{dB}{dt}$ を入れ換えたら間違いですか？

答． その通りです．間違いです．行列の積の順序は入れ換えたらダメですね．ところで，行列の積の順序を入れ換えると結果が違ってくるということは，この講義で説明した３次元空間での回転を考えると納得できます．たとえば，x 軸のまわりに 90 °回転する操作と，y 軸のまわりに 90 °回転する操作は，実際試してみるとわかりますが，順序を逆にすると，結果が変わってきます．

問． 行列の積分は定義されますか？行列の微分積分は,「行列解析」と言うのですか？

答． 定義されます．行列は，スカラーを並べたものなので，掛け算を考えない限りは，ベクトルと同じようなものです．あとでベクトルの積分を定義しますが，行列の積分の定義もそれと同様です．行列の微分積分を行列解析と呼んでも良いですが，ベクトル解析の範囲に入ると言えます．

問． $A(t)$ が直交行列で，$\mathbf{r}$ を直交変換する役割りを行っていることはわかりますが，空間的な意味はどういうものですか？

答． 直交変換は，ある軸に関する回転であるか，あるいは，鏡映 (たとえば，$\mathbf{j}$ と $\mathbf{k}$ の入れ換え) をしてから続けてある軸に関して回転することになります．単位行列 (恒等変換) から連続的に直交行列 $A(t)$ が変化しているとすると，行列式は，1 のままなので，$A(t)$ はある軸に関する回転になります．その際，回転軸は t が変わると変わります．(事情は少し違いますが，コマの回転をイメージするとよいと思います)．

問． 直交行列 $A(t)$ は長さを変えない変換と言えるのですか？

答． 言えます．直交変換は長さを変えません．実は，直交変換は，長さを変えない１次変換として特徴付けられます．(定義から，直交行列は内積を保つ，つまり，$(A\mathbf{u})\cdot(A\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ が任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ について成立するのですが，このことから，長さも保存する，つまり $|A\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|$ であることがわかるし，その逆のことも示すことができます)．

問． 行列の積の微分公式の応用例のところで，$A(0) = I$ としたのはなぜですか？

答． その場合が重要だからです．恒等変換から出発するということです．そうでない一般の場合は，$A(0)$ であらかじめ変換しておけば，$A(0) = I$ の場合に帰着できます．

問． 直交行列 $A(t), A(0) = I$ が回転であると言っていましたが，$\det A = 1$ という条件も含んでいるのですか？

答． 含んでいます．$A(t)$ が t に関して連続的に変わるとすると，$\det A(t)$ も t に関して連続的に変わります．直交行列について，$\det A(t) = \pm 1$ ですが，$t = 0$ のとき，$\det A(0) = \det I = 1$ なので，$\det A(t) = 1$ となります．ところで，断わらすに微分していましたが，$A(t)$ は t に関して微分可能なので，連続になります．

問． ${}^tA(t)A(t) = I$ の両辺を微分して，$A(0) = I, C = \dfrac{dA}{dt}(0)$ として計算すると，${}^tC = -C$ となり C は交代行列となりますが，これは具体的にどういう意味を持つのですか？

答． $A(t)$ は回転軸が変わりながら回転する変換です．その自由度はいくつあるか，ということを直感的に考えてみましょう．まず，回転軸の動く自由度は 2 ですね．それから，回転軸のまわりの回転の自由度が 1 ですね．だから，全部で自由度は 3 です．当然，$\dfrac{dA}{dt}(0)$ は３つのパラメータを含んでいるはずです．では，具体的にどういう形になるか，ということを実際に計算したわけです．

問． $C = \dfrac{dA}{dt}(0)$ はなぜ「出だしの速度行列」なのかわかりません．A という行列は長さなんですか？行列式を長さと考えたのでしょうか？

答． 速度ベクトルと言いたいのですが，行列なので，速度行列という言葉を使っただけです．行列もベクトルです．成分ごとの微分をしたものは，速度とよんでも良いのではないでしょうか．

問． 「微小の回転」は，やらないのですか？

答． やりました．書くのを忘れましたが，$\dfrac{dA}{dt}(0)$ が「微小回転」を表すと考えられます．

問． 交代行列を $C = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$ と表す意味はあるのですか？

答． 少しあります．行列 C の積を，あるベクトルのベクトル積と (この場合は) 思えるのですが，そのベクトルの方をきれいな形にしたかったので，それに応じて符号をつけただけです．

問． ω というベクトルは角速度ベクトルということでしたが，S^1 上を動く $\mathbf{r}(t)$ のときでは，ω はスカラーと同一視できたことを合わせると面白いと思いました．$S^1(\subset \mathbf{R}^2)$ 内の運動では，ω は1次元，$S^2(\subset \mathbf{R}^3)$ 内の運動では，$\boldsymbol{\omega}$ は3次元，もっと考えれば何かが見えてくるのでしょうか？$\boldsymbol{\omega}$ はオイラー角というものと関係あるのでしょうか？

答． 見えてきます．ところで，オイラー角は，(特殊 $=(\det=1)$) 直交行列を具体的に表す角度のことだとおもいますが，それと角速度ベクトル (正確には，交代行列 C) は次のように関係付けられると思います．SO(3) で，3次の直交行列で，行列式が 1 であるものの全体集合をあらわすとすると，それは「3次元リー群」になります．SO(3) の単位元 I での接空間が，3次の交代行列の全体の作るベクトル空間である，ということを実は講義でやったわけです．実は，指数写像というものがあり，指数関数をまねて $\exp tC$ という行列ができるのですが，これが特殊直交行列を表します．

問． 行列の微分と行列式の微分は別のものですか？

答． 別のものです．行列の微分は，成分ごとの微分ですが，行列式は今の場合スカラー関数だから，その微分は，普通の関数の微分です．行列式の定義を思い出すと，各行と各列から成分を選んで，掛けて，符号をつけて足す，というものですが，結局，掛け算の微分の公式から行列式の微分の公式が導かれます．

問． $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \end{vmatrix}$ となる過程がわかりません．

答． これは，一般的な行列式の公式から導かれることなので，それを書いておきましょう．2次の行列式なら，$\dfrac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}$，3次なら，

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix}$$

です．この公式の証明は簡単です．考えてみてください．さて，これを (形式的に) あてはめると，$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ は t に依存しないから，微分が 0 になって，第1項が出てこないわけです．

問． ベクトルの外積 $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$ は，単にそう表されるだけなのですか？それとも何か別の意味があるのですか？

答． 以前回答書に書いたように，外積 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は，等式 $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ が任意のベクトル $\mathbf{c}$ について成立する，という性質で特徴付けられます．(左辺は行列式，右辺は $\mathbf{c}$ との内積です)．このことを「単にそう表した」だけです．だから応用範囲が広いわけです．数学の定義はある意味で，「意味をはぐ作業」です．それを応用する段階になってはじめて，いろいろな意味が付与されます．(モーメントとか，渦とか…)

問． 加速度ベクトルは一方向だけに決まるのですか？

答． 決まります．講義で説明したように，円運動の場合，$\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\omega^2\mathbf{r}$ となるので，位置ベクトル $\mathbf{r}$ の反対向きに決まります．

問． なぜベクトルは文字を2重にして表すのですか？高校のころまでは，ベクトルは $\vec{a}$ のように文字の上に矢印をつけて表していました．

答． 太文字 (ふともじ) ですね．これは慣習です．ベクトルだということをわかりやすく表すということなので，どんな記号でもかまいません．ベクトルであるということが明白な場合は，太文字ではなく，普通の文字を使うときもあります．

問． 加速度ベクトルの微分 $\dfrac{d\mathbf{a}}{dt}$ は，加速度の変化率ということになると思うのですが，数学的，物理的に，何か特別なものを表したりすることはないのですか？

答． 数学的には，ただの3階微分です．ニュートンの昔から考えられてきました．数学的には「考えない方が不自然，避けるのが不自然」だからです．物理的には，ただの加速度の変化率です．物理では，運動方程式は2階の微分方程式で書けるので，3階微分の必要性が感じられないかもしれませんが，非線形の微分方程式 (ソリトンの方程式) などには，3階以上の微分も登場します．ところで，関係ないですが，いま小学校では，小数点2位どうしの掛け算は教えないそうですね．いかにも不自然ですね．日常生活に使わないからでしょうか？簡単なのに… ではまた．