

# 数学概論 A(ベクトル解析) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

No. 2 (2001年4月24日) の分

問. ベクトルの微分の数学的意味は何ですか?

答. こんにちは. 花粉症で苦しい日々です. 皆さんは大丈夫ですか? さて, 回答ですが, ベクトルの微分とは, ベクトルの瞬時的変化を表すベクトルのことです. 定義どおり, ベクトルの平均変化率の極限です. ベクトルを成分表示した場合, 各成分を微分するということです.

問. ベクトルの微分の所で出てきた  $\cdot$  の記号の意味がわかりません.

答.  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  は微分のニュートン流の書き方です. ちなみに,  $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$  はライブニッツ流,  $\mathbf{r}'(t)$  はラグランジュ流の記号だそうです.

問.  $({}^tA)A$  の成分が内積で表されるのはなぜですか?

答. 行列の掛け算の定義が内積の形で表されることを思い出しましょう.

問. 直交行列の行列式が  $\pm 1$  になるのはなぜですか?

答. それを理解するために必要な事実は,  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$  と  $\det({}^tA) = \det(A)$  と  $\det(I) = 1$  (ただし,  $A, B$  は任意の  $n$  次正方行列,  $I$  は単位行列) です. これらを認めると,  $1 = \det(I) = \det({}^tA)A) = \det({}^tA)\det(A) = \det(A)^2$  を得ます. さて, 2 乗して 1 になる数はなんでしょう?

問. 直交行列の行列式が  $-1$  の場合は回転ではないのですか? 必ず, 要素の入れ替えになるのですか?

答. 回転ではありません.  $A$  を直交行列で,  $\det(A) = -1$  とすると,  $A = BT$  と分解されます. ここで,  $B$  は  $\det(B) = 1$  である直交行列で,  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ( $j$  と  $k$  との入れ換え) です. そして,  $B$  の方は, ある回転軸に関する回転になるわけです.

問.  $i$  を回転軸とする回転の場合, 基底の変換行列が  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  と表されるとありますが, これはどうやって求めたのでしょうか?

答.  $i' = i, j' = \cos \theta j + \sin \theta k, k' = -\sin \theta j + \cos \theta k$  を行列を使って形式的に  $(i', j', k') = (i, j, k)A$  と表しただけです. 係数を並べて行列を作っただけです. ちなみに, 基底の変換ではなく, ベクトルの成分のほうの変換行列は,  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  となります.

問.  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$  の証明がわかりません.

答. 参考書(戸田さんの「ベクトル解析」)の pp.29-30 にあります. それを参考にして考えてみてください.

問.  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$  の証明ですが, 成分表示を使った証明ではいけないですか?

答. いけません. 外積の導入の仕方の問題なのですが, この講義では, 分配法則を基に, 外積を成分で表す式を求めました. ですから「循環論法」になってしまいます.

問. 高校の先生は「ベクトルの外積は問題を解くために導入された考え方で本質的なものではない」と言っていました, そうなのですか?

答. その先生の発言の意図を私(石川)は十分に意味を理解していませんが, どんな概念も(広い意味で)問題を解決するために導入されるものだと思います. 必要のないところに, アイディアは生まれません. 外積は重要な概念です. とは言うものの, ベクトルの外積は「外積代数」の言葉でとらえた方が本質的であるというのは確かだと思います. 座標変換で外積がどう変化するか, といったことを観察すると, そのような結論になります. ここで, 外積代数の話をしただけしておきましょう. 3次元ベクトル空間  $\mathbb{R}^3$  から作られる外積代数  $\Lambda(\mathbb{R}^3)$  とは, 記号  $i, j, k, i \wedge j, j \wedge k, k \wedge i, i \wedge j \wedge k$  と 1 とで生成されるベクトル空間で, 積  $\wedge$  が, 分配法則と, 演算規則  $i \wedge i = 0, j \wedge j = 0, k \wedge k = 0, i \wedge j = -j \wedge i, j \wedge k = -k \wedge j, k \wedge i = -i \wedge k$

(および,  $0 \wedge (\text{なんでも}) = 0, (\text{なんでも}) \wedge 0 = 0$ ) で定まる代数のことです.  $\Lambda(\mathbf{R}^3)$  の要素は,

$$a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} + c_1 \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + c_2 \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + c_3 \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} + e \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k},$$

の形に一通りに表されます. ここで,  $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$  などは,  $\mathbf{R}^3$  のベクトルとは考えていないことに注意しましょう.

$$\Lambda(\mathbf{R}^3) = \Lambda^0(\mathbf{R}^3) \oplus \Lambda^1(\mathbf{R}^3) \oplus \Lambda^2(\mathbf{R}^3) \oplus \Lambda^3(\mathbf{R}^3),$$

と直和分解されます.  $\Lambda^0(\mathbf{R}^3)$  は 1 次元,  $\Lambda^1(\mathbf{R}^3) = \mathbf{R}^3$  は 3 次元,  $\Lambda^2(\mathbf{R}^3)$  は 3 次元,  $\Lambda^3(\mathbf{R}^3)$  は 1 次元です. さて,  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \wedge (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$  となりますが,  $\mathbf{i} \leftrightarrow \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}, \mathbf{j} \leftrightarrow \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}, \mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$  と同一視して,  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  をベクトルと思ったものが, この講義で言っている意味の外積  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  になるわけです.

問. 力のモーメントが  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  とのことですが, 力は回転する向きに働くので,  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  だと違う向きになってしまうのではないのでしょうか?

答. モーメントは力の回転する方向ではなく, 回転軸の方向を向いていると考えているわけです.

問. 行列はベクトルの概念から生まれたものですか?

答. 歴史的な流れはよくわかりませんが, 理論的にいうと, 行列は, ベクトル空間の線形写像を表すものなので, 行列とベクトルは切っても切れない関係にあります.

問. 距離空間とは何ですか?

答. 2 点間の距離, すなわち「距離関数」が定められている空間のことです. たとえば, 地球上で 2 地点間を移動する最短時間を考えると, 距離になります. これは実際の距離とは異なります. たとえば, 札幌から見ると, 羽田空港の方が, 弘前より普通の距離は遠いけれど, 時間的には近いですね (たぶん). 最短時間は距離の条件はみたくします. 一般に, 集合  $X$  上の距離関数とは, 関数  $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  であって,  $d(x, x') \geq 0$  (等号は  $x = x'$  の場合に限る),  $d(x, x') = d(x', x), d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$  となるときに言います.

問. 英語で内積と外積のことを何と言うのですか?

答. interior product (inner product) と exterior product と言います.

問. 単位行列がなぜ  $I$  なのですか? 高校や去年の線形代数では, 単位行列を  $E$  と表していたので気になりました.

答. 単位行列を  $E$  と書く人も,  $I$  と書く人もいます. 同僚の話によれば,  $I$  は英語 identity の頭文字で,  $E$  はドイツ語 Einheit の頭文字とのことですが, 詳細は未確認です. まあ, こういうことは, あまり気にしなくてもよいです.

問. 2 階微分をなぜ  $\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2}$  と書くのですか?

答. 慣習です. ちなみに,  $\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \mathbf{r}(t)$  とも書きます.

問.  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$  と  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t))$  の違いがよくわかりません.

答. ベクトル  $\mathbf{a}$  のスカラー  $\frac{1}{c}$  倍は, 普通  $\frac{\mathbf{a}}{c}$  と書かずに,  $\frac{1}{c} \mathbf{a}$  と書くというだけのことです.

問. 根本的な「内積」の定義は何ですか?

答. 根本的というか, 拡張された (一般化された) 意味の内積は, 通常の内積のもつ性質 (正值性, 分配法則など) を持つものを指します. 関数空間上で, 積分で定義されるようなものは, 一般化された意味の内積です. 「ヒルベルト空間」を考える際に重要になります.

問. 数学なくして科学の発展はなかったのですか?

答. その場合は科学が違うように発展したのかも知りませんが, 今あるような科学について言うと, 数学を基本的な言葉としているので, 数学がなければ成り立たないと言えます. ではまた.