数学概論A(ベクトル解析) 質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) No. １０ (２００１年７月３日) の分

問． 特異 m-方体と鎖体がよくわかりません．もう少し具体的に説明してほしいです．$c : I^m \to \mathbf{R}^n$ とはどういうことでしょうか？また，その境界 ∂c とは？写像の境界とはどういうことですか？

答． こんにちは．海外出張で，中国に行ってきました．オリンピックも北京に決まり，中国人のエネルギーに圧倒されました．われわれも負けずに頑張りたいですね．きょうは２回目 (最後) の小テスト (４０分) を実施します．持ち込み自由で，カンニング禁止です．さて，回答ですが，特異 m-方体と鎖体は，**微分形式の積分**を考えるために導入しました．具体的な例としては，線積分を考えるのが一番良いと思います．その積分路は，滑らかな曲線をいくつかつなげたものです．それを $c_1 + c_2 + \cdots + c_r$ と書くことにしましょう．たとえば，正方形の境界を (たとえば反時計周りに) ２周する場合，積分路は $c_1 + c_2 + \cdots + c_8$ と書けますが，この場合，$c_5 = c_1, c_6 = c_2, c_7 = c_3, c_8 = c_4$ なので，$c_1 + c_2 + \cdots + c_8 = 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 2c_4$ と表されますね．これが「形式的な和」の意味あいです．この場合，積分路は，それをパラメータを使って表す表し方にも関係するので，各 c_i は「写像」と考えなければいけません．$t \to c_i(t)$ という写像です．(実は，どっち向きに積分するか，積分路の「向き」だけが問題になることが，線積分の理論からわかるのだけれども)．さて，ここで，微分形式の積分の定義を書いておきましょう．**微分形式の鎖体上の積分**：$\mathbf{R}^n$ 上の微分 m-形式 $\omega = a dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}$ (一般の微分 m-形式は，このようなものの和である)，と，特異 m-方体 $c : I^m \to \mathbf{R}^n$ に対しては，

$$\int_c \omega := \int_{I^m} f(c_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, c_n(t_1, \ldots, t_m)) \frac{\partial(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})}{\partial(t_1, \ldots, t_m)} dt_1 \cdots dt_m,$$

と定義します．左辺を右辺で定義します．右辺は，f と a の合成に，適切なヤコビ行列式をかけて，重積分したものです．ここで，$I^m = \{(t_1, \ldots, t_m) \mid 0 \le t_i \le 1\}$ です．線形性により，$\mathbf{R}^n$ 上の一般の微分 m-形式 $\omega = \sum f_{i_1,\ldots,i_m} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}$ と，一般の m 鎖体 $c = \sum a_j c_j$ に対しては，$\int_c \omega := \sum a_j \int_{c_j} f_{i_1,\ldots,i_m} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}$ で定義します．例：$m = 0$ の場合は，ω が関数で，$c : \{0\} \to \mathbf{R}^n$ が 0-方体のとき，$\int_c \omega = \omega(c(0))$ と定めます．例 ($\mathbf{R}^3$ 上の**線積分**)：$\mathbf{R}^3$ 上の $\omega = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$ と，曲線 (特異 1-方体) $c : [0,1] \to \mathbf{R}^3, c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ に対し，$\int_c a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz = \int_0^1 \left(a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 \frac{dy}{dt} + a_3 \frac{dz}{dt} \right) dt$ と定めます．一般の $\mathbf{R}^n$ 上の線積分でも同様です．さて，**鎖体の境界**についてですが，写像 $c : I^m \to \mathbf{R}^n$ の境界を，$(m-1)$-鎖体として定義します．そのために，写像 $I^m_{j,\alpha} : I^{m-1} \to I^m$ を $I^m_{j,\alpha}(t_1, \ldots, t_{m-1}) := (t_1, \ldots, t_{j-1}, \alpha, x_j, \ldots, x_{m-1})$ で定めます．ここで，$j = 1, \ldots, m$ で，$\alpha = 0, 1$ です．たとえば，$m = 2$ のとき，$I^2_{1,0}(t_1) = (0, t_1)$ で，$I^2_{1,1}(t_1) = (1, t_1)$ で，$I^2_{2,0}(t_1) = (t_1, 0)$ で，$I^2_{1,1}(t_1) = (t_1, 0)$ です．正方形の図を書いて，どんな写像か調べてください．そして，$c : I^m \to \mathbf{R}^n$ に対し，$c_{j,\alpha} := c \circ I^m_{j,\alpha}$ とおき，

$$\partial c = \sum_{i=1}^{m} (-1)^i (c_{i,0} - c_{i,1}),$$

と定めます．ところで，一般の写像に対して，その境界という概念はありません．あくまで，特異方体に対してだけ (そして，それを線形性によって，鎖体に対して) 定義したということです．さて，この講義の最終的目標は，次の定理です：**ストークスの定理**：ω を $\mathbf{R}^n$ の微分 $(m-1)$-形式，c を $\mathbf{R}^n$ の m 鎖体とすると，$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$ が成り立つ．「ストークスの定理」は，十分に究明され，洗練された大定理の多くと同様，つぎの三つの特徴をもっています：**1．それは当たり前のことである．2．そこに現われる諸概念がきちんとうまく定義された瞬間にそれは当たり前のことになった．3．それから重大な結果が出る．**

問． 鎖体の部分で，$I = [0,1]$ とありますが，この範囲に限定するのはなぜですか？

答． 任意の有界閉区間 $[a,b]$ $(a < b)$ は，$[0,1]$ と同相 (位相同型) なので，限定しても一般性が失われないからです．ここで，同相とは，$[a,b]$ と $[0,1]$ の間の連続的 (かつ，逆写像も連続的) な全単射 (１対１対応) があることを意味します．さて，そのような全単射 $[0,1] \to [a,b]$ を実際に構成してみてください．簡単な式でできます．

問． 鎖体の境界で,「向き」というものを考えましたが,「向き」とは何ですか？鎖体の向きというものを，どのような方法，目的で導入し，どういうことが導き出せるのか理解できませんでした．境界の向きはどう決めるのですか？

答． 実は「向き」というのは難しい概念なので，それを持ち出さなくても良かったかな，と反省しているのですが，最初の質問の回答の中にでてきた，$I^m_{j,\alpha}$ と $-I^m_{j,\alpha}$ を幾何的に区別するために,「向き」という言葉を使いました．

問． 鎖体 (さたい) のところが全体的によくわからないのですが，特に，$\partial(\sum_i a_i c_i) = \sum_i a_i \partial(c_i)$ の意味がつかめません．鎖体の境界の辺から話がさっぱりわからなくなりました．

答． この式は定義です．左辺の式を右辺でもって定義しています．

問． m-鎖体は，特異 m-方体のいくつかの形式的な整係数の和ということですが，特異 m-方体を形式的に和をとるというのはどういうことですか？特異 m-方体のいくつかの形式的な整係数の和を m-鎖体とよぶそうですか，ある形をもったものなのですか？

答． 抽象的なので，形はないですが，$m = 1$ の場合は，曲線をいくつかつなぎ合わせた経路，$m = 2$ の場合は，曲面をいくつかつなぎ合わせた図形をイメージするとよいと思います．ただし，写像を扱っているので,「パラメーター付けを指定している」ということに注意しましょう．

問． $2(c_1+3c_4)+(-2)(c_1+c_3+c_2) = -2c_1-2c_3+6c_4$ とのことですが，右辺の第１項は，$-2c_1$ ではなくて，$-2c_2$ ではないですか？

答． そうです．書き間違いです．

問． 境界を表す ∂ と，偏微分の ∂ は何か共通点があるのですか？ただ記号が同じだけなのですか？

答． 共通点はありません．記号が偶然同じだけです．

問． 特異 m-方体のところの連続写像 $c : I^m \to \mathbf{R}^n$ ですが，m と n の関係はどうなっているのですか？

答． 理論的には任意でかまいません．$m > n$ でも大丈夫です．ただし，この講義では，$m=1, n=3$ (空間曲線)，$m=2, n=3$ (空間曲面) の場合が特に重要になります．

問． 特異 m-方体の形式和というのは，もしかして積分路を考えることから導き出されたのでしょうか？そう考えてもおかしくない位，自然な導入に感じました．

答． その通りです．鎖体という概念は,「積分路」を数学的にきちんと定式化するために導入されたものです．

問． 積分の変形式で，$\iiint_V \left(\dfrac{\partial b_1}{\partial x}+\dfrac{\partial b_2}{\partial y}+\dfrac{\partial b_3}{\partial z}\right) dxdydz = \iiint_V \left(\dfrac{\partial b_1}{\partial x}+\dfrac{\partial b_2}{\partial y}+\dfrac{\partial b_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$ としていたと思うのですが，どうしてこうなるのですか？

答． 微分形式の鎖体上の積分というものを定義すれば右辺の意味がはっきりします．ともかく，$dxdydz$ と $dx\wedge dy\wedge dz$ の違いは，順序を入れ換えても変わらないか，順序を入れ替えると符号が変わるか，の違いなのですが，いま，x, y, z の順序を入れ替えないことにすれば，同じものになります．これは，V の「向き」を通常のものにとることに決めるということです．

問． 立体角がよくわからないのですが．

答． 曲面と原点でできる錐 (すい) を作り，単位球面との交わりの部分の面積を立体角とよびます．原点から曲面を見たときの視野の広さを意味しています．

問． 立体角の単位は何ですか？

答． 単位はありません．

問． $\mathrm{div}\mathbf{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r})$ が任意の領域で成立することを導くとき，立体角を使いましたが，長い棒の領域や，すごくぐにゃぐにゃした領域にも当てはまるのでしょうか？

答． この等式は，各点で成立すればよいので，領域を細かく分割して，立体角が使える状況で議論します．

問． 立体角の拡張はできないのですか？

答． できますね．$\mathbf{R}^n$ の単位球面上領域の「測度」(長さ，面積，体積，$\cdots$) を考えれば良いわけです．

問． 数学では，よく $\mathbf{R}^n$ のように n 次元で考えますが，実際の世界との関連はあるのでしょうか？n 次元で考えるのは，数学だけなのでしょうか？物理でも必要となってくるのでしょうか？n 次元で考える意味を教えてほしいです．

答． 一般次元で考えることは必要です．古典力学の言葉で言えば，たとえば，位置の３次元の他に，運動量 (あるいは速度) の分が３次元ありますね．皆さんが，２つの質点が独立に運動していることを記述しようとすると，全部で，$(3+3)\times 2 = 12$ 次元必要です．その時間変化を記述する場合は，時間も入れて，13 次元空間で考えることになります．(相対論を考慮に入れれば，絶対時間はないから，$(3+3+1)\times 2 = 14$ 次元必要です)．質点ではなく，小さな球が回転する場合は，角運動量 (あるいは角速度) の３次元がそれぞれ必要になります．もし，その球は何色ですか？と聞かれたら，赤，青，黄色，などと答えますが，(色とは何か，ということにもよりますが)，コンピュータに色を教えるには，いくつかのパラメータが必要になります．(たとえば「明るさ」なども必要)．その球の材質は何かと聞かれたら，金属なのか，皮なのか，プラスチックなのか，その「ふうあい」を実現するには，いくつもの情報が必要になります．ですから,「実際の世界」で，高次元空間が必要になるわけです．ところで，n 次元で考える意味ですが，**簡単のために一般化する**という側面もあると思います．たとえば，この講義では，３次元空間の曲面の話を主に考えましたが，３次元空間の曲線でも，２次元空間の曲線でも，話が同じなので，それを別々に扱うというのは，煩雑で，愚かなことであり，まとめて面倒をみるのが自然な成りゆきだと思います.「わかる」ということは物事を「分ける」ということですが，分けたあとは，それをまとめる，つなげる，関連づける，そういうプロセスが数学の特長である「汎用性」「普遍性」を生むのです．そのことを皆さんに実感してもらえたらなあ，と感じる今日この頃です．

さて，半年の短い間でしたが，拙い講義におつき合い頂きありがとうございました．眠気に耐えてよくがんばってくれました．またの機会にお目にかかれることを楽しみにしています．お後がよろしいようで．ではまた．