# 数学概論 A(ベクトル解析) 質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
## No. １ (２００１年４月１７日) の分

**問．** 右手系というのはよくわかりません．外積の所に登場した $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ が右手系とは，どういう意味ですか？

**答．** こんにちは．さて回答ですが，右手の親指を $\mathbf{a}$ に，人さし指を $\mathbf{b}$ に向けたとき，$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は中指の向く方向であるという意味です．左手系というものもあります．ただし，人間の骨格を使った定義なので，厳密なものではないですよね．関節の柔らかい人もいるし，馬や犬やムカデには通用しないでしょう．それに，私 (石川) はもともと左ききだからか，右左がとっさに判断できません．それはともかく，右手系であるという条件は，正確に述べると，ベクトルを普通に標準基底を使って成分表示したとき，行列式 $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) > 0$ であるという条件になります．このように，ベクトルの外積は，３次元ベクトル空間の基底，少なくとも３次元ベクトル空間の「向き」とよばれるものをあらかじめ定めておいてはじめて定義できるものです．

**問．** 外積が３次元だけでしか定義されないのはなぜですか？確かに４次元以上の次元ならば，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の両方に直交するベクトルは２つ以上できますが，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ でつくる平行四辺形のようなものは定義できると思います．

**答．** そうです．４次元以上ならば，$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に直交するベクトルは無限にたくさんあり，１つに定まらないという理由です．ところで，外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は，等式 $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ が任意のベクトル $\mathbf{c}$ について成立する，という性質で特徴付けられます．(左辺は行列式，右辺は $\mathbf{c}$ との内積です)．ですから，この性質を使ったとしても，３次元のベクトルでないとうまく定義できませんね．実は，一般次元に「外積」を拡張しようと思うと，「外積代数」というものが必要になり，ベクトルの話だけでは収まらなくなることが知られています．後でこの講義でも説明したいと考えています．

**問．** $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$ とはどういう意味があるのですか？

**答．** 正確には，$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\sin\theta|$ ですね．その意味するところは，$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ はベクトルで，その長さが，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のつくる平行四辺形の面積に等しいということです．

**問．** ベクトルの外積の定義で，その長さが面積に等しいということに納得できません．

**答．** なるほど．物理などで言うところの「次元」を考えると，長さと面積は違う次元なので，それが等しいというのは不自然ですね．実は，この不自然さは，外積の定義のある種の不自然さ (たとえば，３次元でないと定義できない，など) に由来していると思われます．ですから，ここでは，単に (単位は無視して) 数値として等しいと理解してください．

**問．** ベクトルの内積の定義の意味は何ですか？

**答．** 一方のベクトル $\mathbf{b}$ が単位ベクトル (長さが 1) のとき，意味がはっきりします．このとき，$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ はベクトル $\mathbf{a}$ の $\mathbf{b}$ 方向の成分を表します．

**問．** 具体的に，ベクトルの内積と外積はどのように活用されるのですか？

**答．** いろいろ使いますが，たとえば，内積は，仕事量の計算に使われます．たとえば，スキーで斜面を滑るときに，重力のする仕事量は，内積で表されますね．(重力と垂直である) 水平は場所ではスキーはできません．外積は，この講義で，ベクトル場の発散を定義するときに使います．

**問．** (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$ と (2) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ という２つの公式がありますが，どちらが内積の定義なのでしょうか？

**答．** (1) と (2) は結局，同値な条件です．ですから，どちらを定義として採用してもよいことになります．(1) は内積の意味をはっきり示した等式，(2) は内積の計算に便利な等式と言えます．

**問．** 内積の定義の $\theta$ を $\mathbf{b}$ から $\mathbf{a}$ への角度にするとどうですか？

**答．** $\cos(-\theta) = \cos\theta$ なので，角度の符号は気にしなくてもよいわけです．

**問．** 零ベクトルの向きは決まっていないのでしょうか？

**答．** 決まっていません．ですから，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が直交するという言葉は，$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ という条件そのものが定義であると思ってください．

**問．** ３次元ユークリッド空間とは何ですか？

**答．** ３次元空間に，距離 $d(\boldsymbol{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ を入れた距離空間のことです．

**問．** ３次元数ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ と，３次元ユークリッド空間 $\mathbf{E}^3$ はどう違うのですか？そもそも何なのですか？関連して，デカルト座標というものを聞いたことがあります．

**答．** 良いところに気がつきましたね．１年生の線形代数で習う，$n$ 次元**数ベクトル空間** $\mathbf{R}^n$ に和やスカラー倍の構造を考える前の，単に，数の $n$ 個の組の集合 (これも $\mathbf{R}^n$ で表します) を，$n$ 次元**デカルト空間** (あるいは，**座標空間**) とよぶことがあります．そして，そこに距離を考えたものを $n$ 次元**ユークリッド空間**と言います．(この講義では $n = 3$ です)．通常はあまり気にしなくてよいのですが，強いて違いを挙げるとこのようになります．

**問．** $\mathbf{R}^3$ と $\mathbf{E}^3$ の違いは，座標軸が定まっていることと，そうではないことだったような気がするのですが．

**答．** この理解も間違いでないと思います．というのは，上の質問の回答のように，$\mathbf{E}^3$ は距離の定まった空間なので，そこに注目して，その $\mathbf{E}^3$ との間に，距離を保つような対応 (等長変換) が存在するような距離空間のことも，やはりユークリッド空間と言うことがあるからです．もともとの距離の定義は座標を使っているが，一旦距離が定まれば座標軸は忘れられる，ということでしょうか．

**問．** 「ノルム」とはどういう単語ですか？

**答．** 英語の norm, 標準，基準といった意味ですね．仕事の「ノルマ」というのも同じ単語から来ていますね．ベクトルを扱うときの基準になるということでしょうか．

**問．** ４次元以上のベクトルは，どのようなものですか？

**答．** 宮沢賢治の童話や詩に,「こんな不完全な幻想第四次の銀河鉄道」とか「すべてこれらの命題は心象や時間それ自身の性質として第四次延長のなかで主張されます」といった言葉が出てきます．賢治の言う４次元は深い意味をもつと思いますが，数学で４次元ベクトルという場合は，(数学は単純な学問なので) 残念ながらそんなに深い意味はありません．単純に，成分が４個あるベクトルのことです．ベクトルの成分は，何も，縦，横，高さ，時間に限りません．なんでも構いません．ベクトルが４次元以上とは，単に，データの種類の数が４以上ということです．たとえば，100 メートル走，走り幅跳び，３段跳び，走り高飛び，砲丸投げ，やり投げ，の結果を記録すれば，これで立派な６次元のベクトルになります．

**問．** テンソルとは簡単に言うとどういうものですか？$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ は内積で，$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ が外積で，$\mathbf{AB}$ のように，ドットもクロスもなく，ベクトルを並べて書くと，テンソル積を表す，と聞いたことがあります．

**答．** 「テンソル」とは，座標変換したときに，ある決まった変換法則をみたすものの総称です．ちなみに，テンソル積は $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ と書くこともあります．ただし,「テンソル」と「テンソル積」は (関連はありますが) 別の概念です．この講義でも，あとで説明することにします．

**問．** ベクトル解析は地震の分野でも出てくるものなのですか？

**答．** 地震は，波であり，波動方程式に従い，波動方程式を解くときはベクトル解析を使うので，当然，ベクトル解析が出てくるとと予想されます．

**問．** 線形代数を知らなくても，ベクトル解析はわかりますか？

**答．** 少しつらいけれど，がんばれば大丈夫ですよ．ではまた．