トポロジーの考え方（科学技術の世界）プリント No. 8
実代数曲線のトポロジー

２００６年1月6日，１月１３日．　担当　石川 剛郎（いしかわ・ごうお）

実代数曲線の例：
xy-平面上にいろいろな曲線が定まる：
(1) 円　$x^2+y^2=1$, (2) 楕円　$2x^2+y^2=1$, (3) 双曲線　$x^2-y^2=1$,
(4) 放物線　$y-x^2=0$, (5) ２直線　$x^2-y^2=0$, (6) カスプ曲線　$x^2+y^3=0$

射影平面：
xyz-空間内の平面 $z=1$ と単位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ を考える．平面上の点 $(x_0,y_0,1)$ と球の中心（原点）を通る直線を考える．その直線は，球面の２点（対心点）と交わる．逆に，原点を通る直線は，それが，xy-平面上にない限り，平面 $z=1$ と交わり，交点が平面 $z=1$ の上に定まる．したがって，平面 $z=1$ 上の点集合と，原点を通る直線たちのうち，xy-平面上にないものたちの集合が１対１に対応する．また，原点を通る直線たちの集合と，球面の対心点の組たちの集合が１対１対応する．

このような考察から，射影平面は，xyz-空間の原点を通る直線たちの集合と定義される．また，射影平面は，球面の対心点の組たちの集合であると言ってもよい．

射影平面のうち，xy-平面上の直線は，平面 $z=1$ 上のいかなる点とも交わらない，が，しかし，xy-平面上の直線は，xy-平面に乗っていない直線の極限と見なされるから，射影平面のうち，xy-平面上の直線は,「無限遠点」を表現していると見なすことができる．無限遠点たちは，xy-平面上の直線の傾きにより，１次元的な図形を形成する．無限遠点の全体を「無限遠直線」と呼ぶ．

射影平面は球面の対心点の組たちの集合である，という観点からすると，xy-平面は，球面の北半球（または南半球）と１対１に対応し，無限遠点は，丁度，球面の赤道（球面と xy-平面の交点集合）上の対心点に対応している．xy-平面や「無限遠直線」が，”曲がった図形”で表現されるので誤解されることもあるが，トポロジー的には便利な考え方である．

卵形と擬直線：
特異点のない連結で閉じた図形は，円周と同相になるが，その円周の射影平面の入り方（イソトピー形）には２通りある：卵形は，円と同じように，射影平面を２つの部分に分ける．一方は円板と同相，もう一方はメビウスの帯と同相である．もう１通りの入り方は，擬直線と呼ばれ，この場合，射影平面の残りの部分はつながったままで，平面と同相になる．

射影平面上の実代数曲線：
平面に「無限遠直線」を付け加えると，射影平面ができる．射影平面の上で，実代数曲線を考えることができる．

ヒルベルト第１６問題：
射影平面上の非特異実代数曲線を位相的に分類せよ．また，実代数曲面や一般の実代数多様体のトポロジーを調べよ．

射影平面上の非特異２次曲線，３次曲線，４次曲線の位相的分類：
非特異２次曲線は,（空集合でなければ）１つの卵形からなる．非特異３次曲線は，１つの卵形と１つの擬直線の場合と，１つの擬直線だけからなる場合に分かれる．非特異４次曲線は，６通りの位相形に分類される．

現在（２００６年１月）７次曲線の位相的分類までは完成されているが，８次曲線の位相的分類はまだ解決されていない．

参考文献：「代数曲線と特異点」徳永・島田・石川・齋藤・福井著，共立出版，第 II 部「実代数幾何学と特異点」．