

トポロジーの考え方 (科学技術の世界)

資料 No.3

トポロジーの歴史 (19世紀まで)

石川 剛郎 (北大・理・数学)

2005年10月～2006年1月

この節の内容はセントアンドリュース大の web-page

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Topology_in_mathematics.html
による.

「トポロジー」は、オイラー (Euler) にはじまる. 1736年に「ケーニヒスベルグの橋の問題」を解決した論文を出版した. (Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis 日本語で「位置の幾何学に関する問題の解決」. オイラーは明らかに, 距離という考え方にとらわれないう幾何学を扱っている. この論文では, 7つの橋を一回ずつ渡る問題が不可能であることを示しただけではなく, 問題を一般化し, 現代の言葉で言えば, 「グラフが, 各辺を1回だけ通る経路をもつための必要十分条件は, 2頂点の次数が奇数であるか, または, すべての頂点の次数が偶数であること」を示している.)

さらに1750年にオイラーは, 多面体の頂点の個数 v , 辺の個数 e , 面の個数 f について,

$$(1) \quad v - e + f = 2$$

が成り立つという, 有名なオイラーの公式を記した手紙を残している. この簡単な公式が, 多面体に関して多くの研究を残したアルキメデス (Archimedes) やデカルト (Descartes) には見逃されていることは興味深い. オイラー以前の人たちにとって, 計量に関係しないような幾何的な性質を想像することが不可能だったことがその理由だろう.

オイラーは1752年にこの公式の詳細を2つの論文にして発表している. 第1論文では証明に至っていないが, 第2論文では, 多面体を4面体に分割することによる証明を与えている. オイラーは, この驚くべき巧みな証明が, 凸多面体にしか通用しないことには気づいていない.

オイラーによって始められたトポロジーの流れは, あまり知られていない数学者ルイリエール (Lhuillier, 1750-1840) によって受け継がれた. 彼は一生のほとんどをオイラーの公式に関係した問題に費やした. 1813年に彼は重要な論文を発表した. オイラーの公式は, 穴の開いた多面体については正しくないことを注意し, もし, g 個の穴が開いている場合,

$$(2) \quad v - e + f = 2 - 2g$$

が成り立つことを示した.

メビウス (Möbius) は, 1865年にいわゆる「メビウスの帯」に関して書いている. メビウスは, メビウスの帯に裏表がないという性質を「向きづけ不可能」という言葉で記述している. 彼は, この曲面を整合的に向きのついた3角形で覆うことができないことを見つけた.

「トポロジー」(topology)という言葉は初めて使ったのはリスティング(Listing, 1802-1882)である。リスティングのトポロジーに関するアイディアは、ほとんどガウス(Gauss)に依っている。(ガウス自身にトポロジーに関する著作はないが)。リスティングは1847年に「Vorstudien zur Topologie」(トポロジーの予備研究)という論文を書いているし、それ以前も書簡でトポロジーという言葉を使っている。1847年の論文では、複体(complex)という概念も導入している。リスティングは、1861年にメビウスの帯を記述した重要な論文を発表している。メビウスの4年前である。そこでは、曲面の連結性についても研究している。

曲面の連結性を研究しているのは、リスティングが最初ではない。リーマン(Riemann)は1851年(25歳のときの学位論文)、それから1857年の論文で曲面の連結性を論じている。1857年の論文とは、リーマン面が導入された。代数方程式 $f(w, z) = 0$ の研究から生じた。 z を変化させたとき、この方程式を満たす $w(z)$ (一般には多価関数) がどう変化するのが問題である。リーマンは多項式 $f(w, z)$ から定まるリーマン面を導入した。リーマン面の上では、関数 $w(z)$ が一価関数となる。

ジョルダン(Jordan)は、曲面の連結性を調べるもう一つの方法を導入した。ジョルダンは、曲面上の単純閉曲線(サーキット)が一点に連続的に変形できないとき、それを(既約)サーキットと呼んだ。その曲面のすべてのサーキットが整数係数で

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots + m_n a_n$$

と一通りに表されるような既約サーキットの組 $a_1, a_2, \dots, a_n$ の個数 n が曲面の位相不変量であることをジョルダンは証明している。

リスティングは連結性を3次元ユークリッド(Euclid)空間の中で調べているが、ベッチ(Betti)は一般次元の場合に拡張して考えた。最終的に連結性の概念を厳密に基礎づけたのはポアンカレ(Poincaré)である。1895年の一連の論文「Analysis situs」で、「ホモロジー」の概念を導入し、空間の「ベッチ数」を、ベッチ自身が与えたものよりも明解に定義した。そして、ポアンカレは、オイラーの公式を、一般の枠組みに拡張することができた(オイラー・ポアンカレ標数の誕生)。

同じく1895年の論文で、ポアンカレは「基本群」と「ホモトピー」の概念を導入している。

トポロジーが発展した第2の流れは、「収束」の概念の拡張から生じた。1817年、ボルツァノ(Bolzano)は、収束の概念を実数列の収束にこだわらず、数直線内の無限集合に関して考察した。

1872年にカントール(Cantor)は、「第1導来集合」あるいは「極限点集合」の概念を導入し、実直線の「閉集合」を、その第1導来集合を含むような集合として定義した。カントールは、もう一つの基本概念である「開集合」も定義した。

ワイヤシュトラス(Weierstrass)は1877年に講義録の中でボルツァノ・ワイヤシュトラスの定理の厳密な証明を与えている：

数直線上の有界無限集合 S は、少なくとも1つの集積点 p をもつ。すなわち、 S の無限点列 a_n で、 $|p - a_n| < \frac{1}{n}$ を満たすものが存在する。

こうして、「近傍」の概念が導入された。ヒルベルト(Hilbert)は、1902年に、近傍の概念を使って、連続群(位相群)に関して研究した。

(以下、省略)