トポロジーの考え方（科学技術の世界） 質問に対する回答

No. 2 (２００５年１２月２日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しましたが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してください．それから，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．なお，回答書は，http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html に掲載予定です．参考にしてください．

問． フラーレンに関して,「五角形を１２面加えれば六角形がいくつでも多面体がつくれる」とありますが,「六角形に混じっていくつかの四角形と五角形が見える」という場合，四角形と五角形の数は決まっているのでしょうか？// 六角形だけでは閉鎖空間を作れず，五角形も組み込まなければならないということですが，逆に五角形だけで閉じた面を作ることは可能なのでしょうか？//

答． 四角形と五角形の数は決まっていません．五角形だけでも作れます．実際，正１２面体は，五角形だけから成ります．いま，五角形だけの閉じた面で球面と同相なものが作れたとして，各頂点に３つの面が接していて，各辺に２つの面が接しているとします．このとき，頂点の個数を V，辺の個数を E，面の個数を F とするとき，$3V = 5F$ $2E = 5F$ となります．したがって，$V = \frac{5}{3}F, E = \frac{5}{2}F$ なので，$V - E + F = \frac{5}{3}F - \frac{5}{2}F + F = \frac{1}{6}F$ となります．一方，オイラーの公式から，$V = E + F = 2$ が成り立つので，$\frac{1}{6}F = 2$，つまり，$F = 12$ となり，五角形からなるのは，１２面体に限られることになります．

問． フラーレン分子を作るのに五角形が 12 個必要になるということをどの様に導くのですか？

答． 上の回答と同じように，五角形が n 個，六角形が m 個あるとすると，$3V = 5n+6m, 2E = 5n+6m, F = n+m$ なので，$V - E + F = \frac{5}{3}n + 2m - \frac{5}{2}n - 3m + n + m = \frac{1}{6}n$ となります．オイラーの公式から，$\frac{1}{6}n = 2$ がわかり，$n = 12$ が導かれます．

問． 結局のところフラーレンとトポロジーの関係とは何ですか?C で作る色々な巨大分子を作る過程での疑問をとくのにあまりトポロジーが使われていなかったように思われます．唯一オイラーの公式 $V + F = E + 2$ がありましたが，これがトポロジーと関係していますか？

答． オイラーの公式がトポロジーと関係しています．その他にも,「つながり具合」を調べるという意味で,「トポロジーの考え方」は常に背景にあると言えます.（丁度，シンフォニーの基本的なテーマのように，終始流れるメロディーのように）．

問． フラーレンの中に他の元素を入れることができると聞いたのですが，本当でしょうか？また，その場合中心と周りとはつながりがないのですが，トポロジー的にはどのようにとらえて分析するのでしょうか？

答． はい本当です．直接つながりはないですが，他の元素がフラーレンの内側と外側にあるのでは，トポロジー的にまったく違います.（「同位」でない.）実際は，見た目の形よりは，それらの波動関数の重ね合わせの状態に，その配置の仕方が影響を与え，結果的におもしろい物性が現れる，ということですね．

問． サッカーボールはトポロジーを意識してつくられたものですか？トポロジーに基づいているのでしょうか？それとも無意識的にトポロジーが応用されていたのですか？

答． 誰がサッカーボールを作ったか？という問はおもしろいですね．推測するに，スポーツ用具の職人さんが経験的に知っていたことなのだと思います．無意識的にトポロジーが応用されていた，ということだと思います．

問． バックミンスターのベクトル平衡体がよくわかりませんでした．// ベクトル平衡体やフラーレンのように（３角形，４角形)，(５角形，６角形）のような面の組み合わせは他にありますか？それらに図形は正 n 面体のように，種類に限りがありますか？

答． おもしろい問ですね．特に，正多面体との比較を考えた点はすばらしいですね．私 (石川) は詳しいことは知らないので，ぜひ自分で調べてみて，教えてください．

問． オイラーの式を考える時に，平面の図形から空間を囲む図形をつくる場合，はじの辺はどうするのでしょうか？

答． 重なった辺は１つと数えます．

問． トーラスを表す代数曲線の方程式はあるのですか?トーラスに特異点を一つ含む場合の方程式が $z^2 - w^3 = 0$ となるのも全然イメージできません．予想としては，トーラスでも似たような式になると思います．

答． あります．予想の通り，$z^2 = w^3 + aw + b$（ただし，a, b は定数）という方程式です．いわゆる「楕円曲線」という名前が付いています．ところで，どうして「楕円曲線」と呼ばれるかというと，もともと楕円の周の長さを計算するために「楕円積分」というものが考えられ，その積分に関係している曲線なので，楕円曲線と呼ばれています．当然，トーラスと楕円は別のものです．

問． 代数曲線でクラインの壺は表現できますか？

答． できません．複素数の範囲での代数曲線は，いわゆる向き付け可能な曲面になることが知られています．一方，クラインの壺は向き付け不可能なので，代数曲線で表現できないことがわかります．

問． 複素関数のグラフは，例えば $z^2 - w^3 = 0$ のようにすべて，トポロジーの中で考えることができるの

ですか？

答． できます.「トポロジーの中でも考えることができる」といった方が正確です．つまり，詳しい解析や計算をするときに，トポロジー的発想があるかないかで理解がまったく違ってくる，ということです.

問． トポロジーとはつながり具合を表すという事ですが，微分積分学でいう”連続性” などと関連しているのですか？位相とトポロジーの関係をぜひ詳しく聞きたいです.

答． 関連しています．トポロジー（位相幾何学）は，位相 (英語で topology と言います）という概念に基づいて図形を研究する学問です.「同相」ということも，両連続１対１対応ということでしたね.

問． トポロジーは，多様体上の微分積分学に応用されているとのことですが，多様体における微分積分とはどのようなものですか？

答． 曲がった空間での微分や積分です．曲がった空間の中で微分や積分をすると，空間自体のトポロジーのが関係する関係式が得られます．典型的な例は「ガウス・ボンネの公式」とよばれるもので，曲面上の微分を使って定まる「曲率」を曲面上で積分したものが，その曲面のオイラー標数（の 2π 倍）になるという公式です．オイラー標数は，微分や積分とは無関係な感じがするのですが，実はつながっている，ということです.

問． ガウス指数はどのような目的で考えられたのですか？

答． 「回転数」を明確に定義するために考えられたのだと思います．一番基本的で根源的な不変量です.

問． Gauss 指数の求め方について，Whitney の第二定理のみを用いるのは良くないでしょうか？多くの求め方を知るより，もっとも容易な方法１つを理解し用いる方が良いと思いました.

答． なるほど．Whitney の第二定理は簡単な方法ですね．でも，１つの方法だけを知っているより，いろいろ知っている方が良いと思います．というのは，どんな状況に接するか，前もってはわからないし，どれが簡単な方法かは場合場合によって変わってくるだろうし，まったく新しい方法が開発されるかもしれないし，その場合，一番容易な方法だと言われていた方法に”しがみついて”新しい方法を身につけないというのは良くないし．それはともかく，角度の総和で Gauss 指数を求める定義通りの計算法も，Gauss 指数の意味合いを説明するためには，絶対必要です.

問． 折れ線の理論でひき返し点が生じる変形は禁止されていましたが，ひき返し点を用いた何らかの理論体系を組むことは可能だと思いますが？

答． 可能です．可能ですが，結局，どんな折れ線同士も変形で移り合う，ということになって，あまりおもしろい理論にはならないと思います.

問． 資料 No.4 で，LR 折れ線から得られる LR 列が短縮できるのは５つだけですか？

答． 他にもありますが，この５種類の短縮の仕方を使えば定理が証明できる，ということです.

問． あみだくじは，折れ線の集まりですか？まず，あみだくじにおいて重要なのは，そのつながり具合だからトポロジーだと思います．あみだくじは，折れ線を何本かくっつけたように見えます．しかし，この講義で習った折れ線は，全て始点と終点がなかったですが，あみだくじには，始点と終点があります．これも折れ線と呼んでよいのですか？

答． あみだくじも，もちろん折れ線と言えますが，授業で説明した閉じた折れ線とは区別すべきですね. でも，あみだくじは，トポロジーが適用できる良い対象です.

問． 社会科学（経済学，ネットワーク）にトポロジーが応用されているとのことですが，どのような形で応用されているのでしょうか？私は来年経営コンサルティング会社に就職します．業務内容は，企業の業績改善や市場調査等です．自分自身理系学部学生ですが，文系就職をします．統計学や確率論はコンサルティングへの応用の仕方が自分でも容易にイメージできるので，扱いやすく感じますが，トポロジーの応用となるとイメージできません．例えば，小売店の商品陳列に関することを考える際，お客さんの買うものにはある傾向があるようで，これは「つながり」として捉えられます.（おにぎりとお茶を買う人が多いなど）ここにトポロジーを応用するとどうなるのでしょうか？

答． いろいろ応用できると思います．とくに「グラフとネットワーク」が役に立つと思います．単純なつながり以上に，種々のつながり方を表現できます．いろいろなデータを数字の表（ひょう）で表すだけでは様子がわからない場合でも，グラフ（１次元複体）でデータを図示しておくとが全体像がつかみやすくなり，改善点などがはっきりわかります．つなげる線の太さも変えると良いと思います．たとえば，おにぎりとお茶を買う人が多いが，実は，おにぎりを買った人はお茶を買うことが多いが，お茶を買ったからといっておにぎりを買うとは限らない，弁当を買うかもしれない，お茶はおにぎりと弁当の両方とつながっている，でも，おにぎりと弁当を一度に買う人はめったにない，つまり，おにぎりと弁当は直接にはつながっていない（つながり方が弱い）といった傾向が一目瞭然になります.

問． 「複素関数とトポロジー」等，様々な分野とトポロジーのつなかりについて教えてもらいましたが，まだトポロジーについてうっすらと少しわかりはじめてきたばかりで，トポロジーのどんなところがどのように，その分野に役に立っているのか，もっと詳しく知りたいです．また，せっかくなので，先生が研究していることについても詳しく教えて欲しいです.

答． 授業の中で，なるべく紹介していく予定です．乞うご期待．ではまた.