

トポロジーの考え方（科学技術の世界） 質問に対する回答

No. 1 （2005年10月14日の分） 担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しましたが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してください．それから，文体を（です，ます調に）統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．なお，回答書は，<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html> に掲載予定です．参考にしてください．

問．球面のオイラー標数はどのように計算するのですか？// 球面のどこに着目して，頂点はどこにとり，辺はどこにとり，面はどこにとるのか不明です．// 球のオイラー標数の直接的な数え方はできないのですか？// 球面と正多面体の表面のオイラー標数が同じ理由がわかりませんでした．

答．球面のような曲面の場合は，いくつかの点と，いくつかの曲がった辺と，いくつかの曲がった面に分割して計算します．ただし，辺は，通常のまっすぐな辺と同相なものだけを使い，面は，3角形と同相な面だけを使って分割して計算します．重要なことは，そのような条件をみだす分割なら，どんな分割をしても，答えが一定に定まるという点です．球面の場合は，必ず2になります．

問．同相は「両連続な1対1対応を与えることができる場合に言う」とありますが，数学のグラフでなら，連続とか1対1対応のイメージはつかめますが，図形ではよくイメージがつかめません．

答．近くのは近くに対応する，ということが連続ということです．より詳しく言うと，図形 X と図形 Y があって， X の各点 x に対して， Y の点 $f(x)$ が対応していて， x が点 x_0 に近づくときに， $f(x)$ が $f(x_0)$ に近づく，というのが連続の条件です．1対1対応というのは，この対応 $x \mapsto f(x)$ について， $y = f(x)$ という式が， Y の任意の点 y に対して，ただ1つの解 x をもつ，ということです．考え方は，関数の場合とまったく同じです．

問．「対応」とは，何と何に対応しているのですか？

答．2つの図形の点と点が対応しています．

問．同相の“両連続”の定義を詳しく説明して下さい．

答．対応 $x \mapsto f(x)$ が連続な1対1対応であって，その逆の対応 $y \mapsto f^{-1}(y)$ も連続である，両方連続である，という定義です．

問．まると三角が同相なのはなぜですか？

答．両連続な1対1対応が定められるからです．具体的に，円とその外接3角形について，円の中心から，放射状に線をのばしていくと，円の上の点と3角形の上の点に対応し，それが，両連続な1対1対応になるからです．

問．トーラスの中心の穴を小さくしていったら，1点でつけたときはトーラスと同相になりますか？

答．トーラスとは同相になりません．球面とも同相になりません．ところで，トーラスの一部をしぼっていくと，失敗したクロワッサン（の表面），のような図形ができますが，この図形と，質問にある図形は同相になります．

問．同位というものは，2つの図形が空間の中で連続的に移りあう，という事ですが，それは，例えば，1つの球形の粘土があって，それを正四面体形に変形すると同位だけど，穴をあけて，取っ手をつくると，同位ではなくなるということでしょうか？

答．そうです．穴をあけた瞬間に，連続性が破れています．

問．連続的に変形するというのはどういった状況なのかが，よくわかりません．できれば，簡単な例で説明してください．

答．1枚の紙を破らずに，くしゃくしゃに丸める，というのが1つの例です．

問．同位の定義は何ですか？

答．空間内の2つの図形 X と Y が同位とは，空間の同相写像（空間から空間への両連続な1対1対応，考えている図形だけではなく，空間全体で定義されている）の連続な族 φ_t （ただし，パラメータ t は0から，徐々に変化していったら1まで動く）があって，恒等写像 $\varphi_0(x) = x$ から始まって，最終的に φ_1 が X を Y に写す，ときに言います．このとき， X と Y は，途中の図形 $X_t = \varphi_t(X)$ を経由して，連続的に変形されていく，という意味合いです．

問．同相であって，同位でないもので，鏡像の関係でないものはありますか？

答．あります．講義でも説明しましたが，結び目とよばれる閉じた紐は，いくら絡んでいても，同相です．しかし，同位ではない結び目が簡単に作れます．

問．プリントの図5の2つの図形が，実は同位である，ということがわかりません．

答．講義中に説明します．

問．種数がよくわかりません．たとえば，立方体の正方形の各面に4つの穴がまっすぐ反対側に届いているような図形には種数がありますか？あるとしたら，どうやって数えますか？

答．あります．取っ手を1つずつ取っていく，という操作をすれば，求められます．私(石川)の計算では，種数24となります．

問．2重のメビウスの帯は，円筒と同相ですが，メビウスの帯とは同相なんですか？

答．同相ではありません．

問．3重のメビウスの輪は作れるのでしょうか？// 3重，4重のメビウスの帯は実現可能なのでしょうか？

答．作るのとは不可能です．講義で説明・実演します．

問．曲面，たとえばサッカーボール，の表裏は，勝手に表と決めたら，その逆の方が裏となるのですか？

答．そうです！「向き付け可能」というところで説明した，表裏がある，ということは，詳しく言えば，表裏が決められる，ということです（どちら側が表かが決まっている，という意味ではありません）．

問．円筒は向き付け可能ですか？

答．向き付け可能です．裏表を決められます．

問．メビウスの帯のへりとメビウスの帯のへりをくっつけると，どんな図形になるのでしょうか？

答．クラインの壺（つぼ）という図形になります．

問．クラインのつぼが3次元空間で実現不可能な理由がわかりません．

答．3次元空間の中で無理矢理実現しようとする，自分自身と交差するような図形になるからです．自分自身と交差しないように表そうとすると，どうしても4次元空間が必要ということが，証明されています．

問．「クラインのつぼ」は何次元で実現可能ですか？

答．4次元で実現可能です．

問．トポロジーとはどんなことに応用されるのでしょうか？

答．いろいろなことに応用されています．この講義で，その一端を紹介する予定です．

問．Möbius band は自然界に存在するのですか？

答．存在します．実際，北大工学部の丹田聡さんのグループでは，メビウスの帯の形をした結晶を実現しています．

問．炭化水素(C_nH_{2n+2})の異性体数を C と H のつながり具合で分析していくことはできないでしょうか？

答．おもしろそうですね．じっくり化学の知識を増やしながら，トポロジーの考え方を活用してみると面白いと思います．

問．大昔，トポロジーについて考え始めた人達は，冷静に研究できたのでしょうか？昔，この学問が発達し始めたとき，世間で“一大発見だ!!”みたいな大騒ぎにならなかったのでしょうか？

答．冷静に研究できたと思います．それは，オイラーやガウスやポアンカレのように，偉大な数学者たちだからでしょう．大騒ぎにならなかったと思います．それは，オイラーやガウスやポアンカレのような偉大な数学者だけが，当時，トポロジーについて真に理解できたからでしょう．しかし，最近では，トポロジーも多くの人に理解され出してきた，いろいろな分野に応用されてきているので，冷静に研究を続けていても，世間が大騒ぎするかもしれません．ひょっとしたら来年あたりそうなるかもしれませんね．ではまた．