数学序論１１質問の回答　担当教官 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

No. ９ (２０００年１月１２日) の分

問. ★ f が連続，全単射で，f^{-1} が連続でない写像はあるのでしょうか？全単射で f が連続なら，f^{-1} も連続だと思います.

答. あります．f が全単射で連続でも，逆写像が連続とは限りません．例によって，具体例を挙げて説明します．$X = [0, 1) \cup [2, 3], Y = [0, 2]$ とおき，それぞれに $\mathbf{R}$ からの相対位相を入れ，位相空間とします．写像 $f : X \to Y$ を，$f(x) = x, (0 \leq x < 1), f(x) = x - 1, (2 \leq x \leq 3)$ により定めます．(f のグラフを書いてみよう．) f は連続ですね．(f の定義域に注意しよう．) また，f は全単射ですね．そこで，f の逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ を考えましょう．$f^{-1}(y) = y, (0 \leq y < 1), f^{-1}(y) = y + 1, (1 \leq x \leq 2)$ となります．(f^{-1} のグラフを書いてみよう．) f^{-1} は連続写像ではないですね．ほうらね.

問. 「f が全単射ならば f は連続である」とは言えないのですか？

答. 言えません．たとえば，写像 (関数) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を，$f(x) = \frac{1}{x}, (x > 0), f(x) = x, (x \leq 0)$ で定義しましょう．f のグラフ $y = f(x)$ を図示してみてください．この f は全単射ですが，連続ではありませんね．($x = 0$ で連続でありません．同じことですが，位相空間での連続写像の定義にあてはめると，$\mathbf{R}$ の開集合 $U = (-1, 1)$ の逆像は，$f^{-1}(U) = \{-1 < x \leq 0, 1 < x\}$ なので，$f^{-1}(U)$ は $\mathbf{R}$ の開集合ではなく，f は連続でない，と結論されます．)

問. 位相空間を考える時には，ユークリッド空間等のイメージを持ちながら考えればよいのか，それともそういう具体的なものから離れて，論理だけで考えればよいのかわかりません.

答. つかずはなれず，ということです．具体的なものから付かず離れず，論理を考慮して考えればよいわけです.

問. 距離空間と位相空間の関係がよくわからないです．距離空間以外の概念を理解することによっても位相空間を考えることも可能なのですか？

答. 距離空間以外の概念というより，直接に，位相を定義するということが可能，ということです．密着位相などはその典型的な例ですが，ほかにもいろいろあります．たとえば，代数幾何で「ザリスキー位相」というのがあります．それを，$X = \mathbf{R}$ の場合に説明しましょう．ここでは，$\mathbf{R}$ の「開集合」を，$\mathbf{R}$ から有限個の点を除いたもの (零個でもよい)，または空集合，と定めます：$\mathcal{O} := \{U \mid U = \mathbf{R} - \{a_1, \ldots, a_r\}, \text{または} U = \emptyset\}$ と決めるわけです．これが，位相 (開集合系) の条件をみたすことが確認できます．この位相は，$\mathbf{R}$ 上の通常の位相 (ユークリッド距離位相) より弱い (小さい，粗い) 位相です．このザリスキー位相で考えたとき，$\mathbf{R}$ の「閉集合」は，どういう集合でしょう．補集合が「開集合」である，というのが「閉集合」の条件なので，$\mathbf{R}$ の有限部分集合 (空集合も可) と $\mathbf{R}$ が，$\mathbf{R}$ の「閉集合」です．これは，多項式の零点集合になりうる集合を「閉集合」とする，ということです．したがって，代数方程式 (多項式 $= 0$ の形の方程式) の解集合を調べる場合，ザリスキー位相が基本的な手段・方法になることは理解してもらえるかな，と思います.

問. 写像 $f : X \to Y$ が連続写像であるという定義を,「$U \subset X$ 開集合について，$f(U) \subset Y$ が開集合」としてはいけないのはなぜですか？

答. 世の中が混乱するからです．いままで，いろいろな場面で「連続」という概念を学んできたと思いますが，上の条件を連続の定義にしてしまうと，今までとまるっきり食い違う定義になってしまうからです．具体例で説明しましょう．$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2$ は連続写像ですね．また，$U = \mathbf{R}$ は $\mathbf{R}$ の開集合ですね．でも，$f(U) = \{y \in \mathbf{R} \mid 0 \leq y\}$ は $\mathbf{R}$ の開集合ではありませんね．ふつうの意味で連続なのに，上の定義を採用してしまうと，連続でなくなってしまい，これは混乱しますね.

問. 「一般に $\bar{A}$ は閉集合」とのことですが，閉集合にならないケースもあるのですか？

答. 常に閉集合です．ここで言っている「一般に」は,「常に」という意味です.

問. 触点は，内点または境界点ということになるのではないでしょうか？

答. そのとおり.

問. 位相空間で出てきたコンパクトという概念と，複素関数で出てくるコンパクトは違うものなのですか？

答. 複素数平面 ($= \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$) では同じ概念です.

問. 「コンパクト」の定義がよく分かりません．他の講義で「コンパクト」のことを「有界かつ閉」と言っていたので，そのように覚えていたのですが，この講義の「任意の開被覆について有限部分開被覆が選べる」と「有界かつ閉」が同じ条件であるとはどうしても思えないのですが.

答. そうですか．でも，教科書 p.86 定理 11.2 にあるように，ユークリッド空間の部分集合に関しては同値であることが証明されます．証明されるので，どうしても同じ条件と思えない，ということはないと，どうしても思えます.

問. 位相空間で連続関数を定義することを学びましたが，位相空間で「一様連続性」は示せるのでしょうか？コンパクト集合上で連続な関数は一様連続と定義 (?) してしまってはいけないのでしょうか？

答. 一様連続性は，距離空間では定義できますが，位相空間では定義できない，つまり,「開集合」とい

う概念だけでは，どうがんばっても定義できませんね．

問． ★ X の位相を $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ (密着位相) にとったとき，位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合は全て compact になりますか？

答． なるほど．その通りです．

問． 位相空間 X, Y が同相とは，同相写像が「１つでも」あるとき，とのことですが，X, Y が同相のとき，同相写像が２つ存在することがあるのですか？

答． あります．具体例を挙げます．$X = \mathbf{R}, Y = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x\}$ とします．(通常の位相を考えます．) 写像 $f : X \to Y, f(x) = e^x$ は同相写像です．(確かめてみてください．) また，$g : X \to Y, g(x) = e^{-x}$ も同相写像です．X と Y は同相であり，X から Y への同相写像が複数ありますね．

問． 同相でない位相空間の例を教えてください．

答． 勝手に２つ位相空間をもってくると，大体同相でないのが普通ですね．したがって具体例はたくさんありますが，たとえば，$X = \mathbf{R}$ と $Y = [0, 1]$ に通常の位相を入れると，X と Y は同相ではありません．同相でないことを証明してみてください．

問． 同相と同型の違いは？代数学で同型というのをやりました．その内容は，A と B の間に全単射の φ という写像が存在することでした．同相は上の条件プラス逆写像 f^{-1} が連続であるということですが，これは，連続の定義から結局全単射ということにふくまれて，同じではないのでしょうか？

答． よい質問ですが，その説明の文章に多くの誤り (明確でない点) があり，残念です．たとえば，A, B が群であれば，$\varphi : A \to B$ は，**準同型写像**であり，かつ全単射でなければなりません．このとき，逆写像 $\varphi^{-1} : B \to A$ が準同型になるかどうか問題なわけですが，群の場合は，実際に準同型になるわけです．(簡単に証明できます．) そういう意味で，同型写像の定義で，φ^{-1} が準同型である，ということは明記しなくてよいわけです．ところが，位相空間の場合は，全単射で連続でも，逆写像は連続とは限らないので，同相写像の定義の中に，逆写像が連続ということも明記する必要があるわけです．ちなみに，同相写像は**位相同型写像**とも呼ばれます．

問． 複素数平面と球面は同相であると言えますか？

答． 同相ではありません．つまり，複素数平面 $\mathbf{C}$ と球面 S^2 の間に，同相写像は１つも存在しません．存在しないということが証明できます．(たとえば，$\mathbf{C}$ はコンパクトではなく，S^2 はコンパクトであり，コンパクトであるかどうかは，同相な位相空間では共通な性質である，ということが証明できるので，$\mathbf{C}$ と S^2 が同相でない，と証明されます．)

問． 同相であるというのは，位相の大小と関係していますか？

答． そうですね．ただし，位相の大小は，同じ集合の上で考えていて，$(X, \mathcal{O})$ と $(X, \mathcal{O}')$ の位相の比較で，$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ か，$\mathcal{O} \supset \mathcal{O}'$ か，そうではないか，ということでしたが，同相であると言う概念は，異なる集合の位相空間に関して適応されます．写像 $f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}')$ が同相写像とは，言い換えると，全単射であって，f の誘導する X の部分集合たちと，Y の部分集合たちとの対応が，$\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ の間の全単射を与えるということなのです．

問． X と Y が同相なら，実はこの２つの位相は同じである，ということですか？

答． 「位相が同じ」という意味をはっきりさせなければいけませんね．位相が比べられるのは，同じ集合の上だけです．ですから，そのままで意味があるとは言えません．同相であるということは，同相写像 $f : X \to Y$ があるということですが，このとき，Y から f によって誘導される X の位相が定義されますが，f が同相写像ということは，その誘導された位相が，X 上のもともとの位相と同じである，ということになります．

問． ★２つの位相空間 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相であるとき，$\mathcal{O}_X$ と $\mathcal{O}_Y$ の濃度は等しくなるでしょうか?

答． その通りです．よいセンスをしていますね．この講義で以前あつかった濃度の概念と位相の概念をむすびつけた点に感心しました．実際に同相写像 $f : X \to Y$ から，全単射 $F : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$ を定義してみてください．

問． 位相空間上での連続写像の定義は，距離空間上での連続写像の定義とわざと同じようにしたのですか，それとも偶然ですか？

答． わざとです．自然に一般化しているということを明示したいわけです．

問． 位相空間を $(X, \mathcal{O})$ と書きますが，定義や定理を示すときに $\mathcal{O}$ はまったく使っていない気がします．

答． 常に使っています．定義や定理では，必ず「開集合」という概念を使っているはずです．そして，部分集合が「開集合」かどうかを決めるということが，X 上の位相 $\mathcal{O}$ を決めるということだからです．

問． 「$f(A) \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ ならば $A \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$」がわかりません．

答． 定義にしたがって，しゅくしゅくと証明するだけです．結論を示すために，$a \in A$ とします．この a が，ある $\lambda \in \Lambda$ について，$a \in f^{-1}(U_\lambda)$ を示せばよいわけです．さて，$f(a) \in f(A)$ です．したがって，$f(a) \in \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ です．定義から，ある $\lambda \in \Lambda$ について，$f(a) \in U_\lambda$ です．このことは，$a \in f^{-1}(U_\lambda)$ です，ここで，逆像の定義を使っています．あっ，もう証明されちゃいましたね．

問． 講義に出てきた，「$A \subset f^{-1}(U_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{\lambda_r})$ ならば $f(A) \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_r}$ 」の示し方を忘れてしまいました．

答．$f(A)$ の任意の要素は $f(a), a \in A$ と表されますね．ところが，$a \in A$ なので，ある $i = 1, \ldots, r$, $\lambda_i \in \Lambda$ について，$a \in f^{-1}(U_{\lambda_i})$ となりますね．つまり，$f(a) \in U_{\lambda_i}$ です．したがって，$f(a) \in U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_r}$ です．

問．逆像と逆写像の違いがわかりません．

答．全然異なる概念なので，これを混同しているとすると，それは，勉強不足としか言えません．逆像は部分集合です．定義域の部分集合です．逆写像は写像です．全然違う概念です．詳しくは教科書の該当する部分を見て下さい．

問．定義通りに考えれば，$f : X \to \emptyset$ (X は位相空間) は連続ということになりますが，この f は一体全体如何なるものなのでしょうか？私は「根性が曲がっている」とよく言われますが，その根性で例外を探していると，定義に従っているにもかかわらず，とんでもない実例がでてきてしまうこともあります．

答．根性があるだけよい，と思います．また，上で扱っていることは，それほどとんでもない実例ではありません．つまり**根性の曲がり方が甘い**とも言えますね．もっと，どんどん根性を曲げてください．ところで，写像 $f : X \to \emptyset$ というものは存在しません．なぜなら，写像の定義から，各 $x \in X$ に対し，$f(x) \in \emptyset$ が決まらないといけないわけですが，空集合とは，要素を持たない集合なので，そんなものは決められないわけです．つまり，いかなる写像 $f : X \to \emptyset$ も存在しないわけです．ここで，$X \neq \emptyset$ に注意しましょう．存在しないから，考えなくてもよいわけです．よかったですね！

問．質問の回答書 (No.8) には「この講義においては位相空間がわかれば頂上だ」と書いてありますが，この講義の範囲にとどまらず，現在の数学全体で考えても，やはり「位相空間が頂上」なのでしょうか？

答．No. 8 の回答書には,「この講義 (位相入門) の内容の理解度を登山に例えると，数直線 $\mathbf{R}$ がわかれば１合目，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ がわかれば３合目，距離空間がわかれば７合目，位相空間がわかれば頂上です．その頂上からは下界の街や低い山々が一望できます．洒落たホテルやレジャー施設もあり，結構楽しめます．また，この位相山 (相撲のしこ名のようですね) は，もっと高い山 (多様体山，微分方程式山，表現論山，特異点岳，リー群山などなど) への経由地点ともなっています.」と書きました．したがって,「位相空間がわかれば位相山の頂上に立ったと言える」ということです．しかし，数学全体を１つの山に例えるのは，とても無理です．なぜなら，数学とは多様な世界であり，いろいろな分野があるからです．山に例えると，数学は連峰であって，１つの山を登ったからといって，他の沢山ある山々を登ったことにはなりませんね．でも，もう他の山にも登る能力は身に付けた，だから，遭難しないように，よく準備して他の山にも登ってみよう，ということですね．

問．位相空間論と位相幾何学との関係はどのようなものですか？

答．位相空間論を基礎理論として位相幾何学は発展しました．実際，位相空間論は，一般位相幾何という名前で位相幾何の１分野にはなっていますが，位相幾何の大事な対象は，一般に位相空間ではなく，やはり，$\mathbf{R}^n$ だったり，それを一般化した「多様体」だったり「胞複体」だったりするわけです．そのような，ある意味で綺麗な空間を対象に，位相空間論や微分積分学，解析学，代数学といった強力な武器を応用して，幾何学を行うというのが，現代幾何学の立場であり，位相幾何学もその例外ではありません．

問．順序集合と位相というのは関係があるのでしょうか？冬休みの宿題が順序集合の話で，少々面喰らった感があります．

答．直接には関係がない，というのが正しい認識でしょう．講義時間の都合上，宿題にしたわけですが,「集合と位相」という科目のなかで，順序集合やツォルンの補題は不可欠な項目であり，あとあと役に立ちます．

問．「順序集合とツォルンの補題」のプリントに関する質問ですが，順序集合のところで,「x, y が比べられなくても OK」とありますが，それはどういうことですか？

答．全順序集合でなければ,「任意の x, y に対して，$x \leq y$ または $y \leq x$ 」とは限らない，ということを強調したまでです．たとえば，ある集合 X の冪集合 (X の部分集合の全体) に包含関係で順序を定めると，(X が１点からなったり，空集合の場合という特殊な場合は除いて) 全順序集合にはなりませんね．ところで，まったく関係ないですが，世の中には，なんでも比べられると思っている人が多いようです．何でも，隣の家と比べたり，国民の平均と比べたり，世間の評判を気にしたり… 自分の価値観はどこにもないのか，と思いますが，仕方ないのでしょうか？人間の価値観は，他人が決めるものなのでしょうか？ときどきわからなくなります．

問．★プリントに関する質問ですが，順序集合が「帰納的」ということはどういうことなのか，具体例で教えてください．数学的帰納法と関係しますか？

答．正直言って考えたことがありません．帰納的順序集合は,「帰納的極限」と関係している，ということしか私 (石川) は知りません．どなたか御存じありませんか？

問．プリントに関する質問ですが，$S' = S \cup \{x\}$ が１次独立になることがどうしてもわかりませんでした．

答．「$S \subset \mathbf{R}$ が $\mathbf{Q}$ 上１次独立で，$x \notin \langle S \rangle$ ならば，$S' = S \cup \{x\}$ が $\mathbf{Q}$ 上１次独立である」という部分ですね．ともかく，定義を思い出しましょう．まず，$\langle S \rangle$ は，S で生成される部分 $\mathbf{Q}$ ベクトル空間であり，言い換えると，S に属する有限個のベクトル (この場合は実数) の組の $\mathbf{Q}$ 係数１次結合で表すことのでき

るベクトルの全体です．ここでベクトルと言っていますが，実数全体 $\mathbf{R}$ を有理数全体 $\mathbf{Q}$ 上のベクトル空間と考えているので，実数を有理数上のベクトルとみなしているわけです．(スカラーは有理数)．それから S' が１次独立ということは，S' に属する有限個のベクトルの組が１次独立であるということです．ベクトルの組 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ が１次独立ということは，$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_rx_r = 0, c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbf{Q}$ から $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$ が導かれるということですね．これらを考慮して証明しましょう．さて，S' から有限個のベクトルをとります．その中に x が入っていなければ，S のベクトルの組なので，仮定から１次独立ですね．だからその場合はよいので，そうではなく，そのベクトルの組の中に x が入っているとします．１次独立かどうかはベクトルの並べ方の順番には関係しないので，S' からとったベクトルを $x_1, x_2, \ldots, x_r$ としたとき，$x_1, \ldots, x_{r-1} \in S, x_r = x$ として良いですね．さて，$c_1x_1 + \cdots + c_{r-1}x_{r-1} + c_rx_r = 0, c_1, \ldots, c_{r-1}, c_r \in \mathbf{Q}$ としましょう．もし $c_r \neq 0$ とすると，$x = (-\frac{c_1}{c_r})x_1 + \cdots + (-\frac{c_{r-1}}{c_r})x_{r-1}$ と表されますね．すると，$x \in \langle S \rangle$ となっ大前提に矛盾します．したがって，$c_r = 0$ です．よって，$c_1x_1 + \cdots + c_{r-1}x_{r-1} = 0$ であり，仮定から，$x_1, \ldots, x_{r-1}$ は１次独立なので，$c_1 = 0, \ldots, c_{r-1} = 0$ が導かれ，結局，$c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$ が導かれます．よって，$x_1, x_2, \ldots, x_r$ は１次独立であり，したがって，S' は１次独立です．このように，定義を思い出しておけば，何の苦労もなく，いたって簡単に証明されます．

問． ツォルンの補題は，証明はどのように行えばよいのですか？

答． プリントにも書こうと思ったのですが，スペースがなかったので，証明は省略したんですが，まずかったですね.「集合と位相」という題目の本が，本屋や図書館に必ずおいてあるので，証明に興味がある方は，それを読んでみてください．でも，ツォルンの補題は「使ってなんぼ」という世界なので，どんどん使って，その後で証明をフォローするという手もありますね．

問． 前から気になっているのですが，ある本を読んだ時，滑らかな写像 (C^∞) を定義する際に,「$X \subset \mathbf{R}^k, Y \subset \mathbf{R}^\ell$ について，$f : X \to Y$ が**滑らか**であるとは，任意の $x \in X$ に対して x を含む開集合 $U \subset \mathbf{R}^k$ と，$U \cap X$ 全体で f と一致する**滑らか**な写像 $F : U \to \mathbf{R}^\ell$ が存在するときに言う」とあるのですが,「滑らか」の定義の時に「滑らか」という語を使っているようでおかしな感じがします．

答． なるほど．でも，上の説明では，１年生で習う微分積分で，$\mathbf{R}^k$ の開集合上の関数が C^∞ であるということは，すでにみんな知っているだろう，という背景があるわけです．X は $\mathbf{R}^k$ の開集合とは限らないので，あてはまらないけれど，U は $\mathbf{R}^k$ の開集合なので，F が滑らかということは，みんな知っているだろうというわけです．

問．「$\mathbf{R}, \mathbf{R}^n$, 距離空間，位相空間の関係は，いわば，らせん階段の様で,...」と講義にありましたが，なにがなんだかわかりませんでした．

答． 同じ言葉で名付けられている概念，たとえば,「開集合」や「連続」という概念でも，それを受け取る立場の高さでちがってくるよ，$\mathbf{R}$ の場合と $\mathbf{R}^n$ 場合と距離空間の場合と位相空間の場合とは，その**認識の高さが違う**んだよ，と言いたかったわけです．数学の話ではなく，こころがまえです．

問． 位相についての演習をするのにお薦めな本を紹介してください．数学を理解するのに，教科書や講義のノートを見て，まず定理などを覚えるのも必要だと思うのですが，その後に演習をしようとして，わからない問題があったとしても，教科書のうしろの方には，答えしか書いていないので，何をどう使って解いたのかも書いてある本はないでしょうか？

答． うむ．でも，この教科書が「位相」に関しては世界中で一番わかりやすいんです．それから，覚えるとしたら，定理ではなく，**まず定義を覚えよ**，というのが，肝心なところです．定理はまあどうでもよい，まず定義であると言えます．ですから問題を解くことしたら，まずやるべきことは，悩むことではなくて，問題に出てくる用語の**すべての定義を思い出す**ことです．実際に，定義をその問題の状況にあてはめ直して，ノートに書き下してください．そのようにして，**解くべき問題を書き換える**ことです．そうすると，問題は半分解けたようなものです．そんなこんなで問題を解くのを楽しんでいると，結局，別の演習書を解いている暇はなくなると思います．こんな回答でよろしいでしょうか？

問． ある本に,「どこかに我々と同じ程度の知的生命体が存在し，数え上げをすることができるならば，我々と同じ形の数学を構成することだろう」とあったのですが，数学とは，数え上げからただ１通りに定まるものなのでしょうか？全く違った世界で生きた人が考えれば，違った数学ができあがってしまっても，おかしくないと思うのですが．

答． 難しい質問ですね．物理学，化学，生物学などに比べると，数学は，比較的に周辺の環境に影響されない，普遍的な学問と言えます．それでも，ただ１通りとは断定することはできないと思いますね．数学の発展の仕方などは，かなり社会のありように大きく関わっているような気がします．

問． ずっと前から，大学の先生の生活ってどういうものだろう，と思っています．どうやったら大学の先生になれるのか，月給はいくらか，何時に出勤なのか，学会って何，定年はあるのか．などです．

答． すべては運です．それより，**学問が飯より好き**でないと勤まりませんね．たとえると**学問は知的格闘技**なので，ヒクソン・グレイシー (知っていますか？) のように，強固さと柔軟さを兼ね備えた思考力が欠かせません．長く続けるには，毎日の摂生も必要ですね．月給はなんとか飢えをしのげる程度の薄給です．毎朝早く出勤して，夜遅くまで研究にいそしんでいます．学会というのは，そのような研究者たちが，一堂に会して情報交換する場です．定年はもちろんありますよ．以上です．まあ，ここでは答えづらい点もあるので，詳しくは直接私 (石川) に聞いてください．