数学序論１１質問の回答　担当教官 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

No. 8 (１９９９年１２月８日) の分

問. 現在考えられている空間はすべて位相空間に含まれるのですか？

答. あけましておめでとう．それはともかく，新春早々難しい質問ですね．(質問自体は去年のものですが．) 地球上のどこでだれがなにを考えているか，私 (石川) は知るすべをもっていないので (世のなかには突拍子もないことを考える人がいるものです)，わかりませんが，多くの空間は，位相空間と考えられます．実はその位相空間は，クリスマスケーキのスポンジ部分みたいなものであり，基礎になります．そこにいかにデコレーションがなされるか，ということになります．ところで，この講義 (位相入門) の内容の理解度を登山に例えると，数直線 $\mathbf{R}$ がわかれば１合目，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ がわかれば３合目，距離空間がわかれば７合目，位相空間がわかれば頂上です．その頂上からは下界の街や低い山々が一望できます．洒落たホテルやレジャー施設もあり，結構楽しめます．また，この位相山 (相撲のしこ名のようですね) は，もっと高い山 (多様体山，微分方程式山，表現論山，特異点岳，リー群山などなど) への経由地点ともなっています．ぜひ一度おこしください．距離空間から位相空間へが少し難所なので，ここで足をくじいたり，あきらめて途中で引き返す人もいます．でもくれぐれも遭難しないように．

問. 位相空間はどの程度まで直感的にとらえていいのですか？

答. どの程度でもかまいません．ただし，**最終的に論理に照らしてみる**ということを怠ってはいけません．私 (石川) は論理的に考えることと，直感的に考えることは両立すると考えます．むしろ，一方だけではダメだ，バランスが必要だ，と思います．そして，**論理的に考えることで，直感が鍛えられ，直感を駆使することで，論理が冴えてくる**と言えます．ところで，みなさんの質問書に,「イメージがわきません」という言葉が度々出てきますね．実は「貧弱なイメージなんか持たない方がいい」と言いたいのですが，過激なのでやめますが，ともかく，**イメージがわかなかったら具体例にあたれ**というのがアドバイスです．(このことは何度も書いています．)

問. 集合 X 上の位相 $\mathcal{O}$ に属する部分集合を「X の開集合」とよぶのはなぜですか？「開集合」と呼ぶからには，何か感覚的に「開」であるのでは，と思うのですが．開集合とは何なのかわからなくなりました．

答. この場合,「感覚的」に理解するより,「歴史的」に理解したほうがわかりやすいかも知れません．ユークリッド空間や距離空間での開集合の概念などを，歴史的にかなり後から「位相」というものにまとめあげたので，その**歴史的経緯**から，位相の要素は開集合とよぶのがよかろう，ということです．たとえると,「すすきの」に，すすき野があるわけでもなく,「麻生」に麻が生えているわけでもなく,「平岸」は平らな岸ではなく,「北広島」は，広島の北にあるからそうよぶわけでもなく,「銭箱」に小判の箱が埋まっているわけでもない，のと同じです．ともかく，**位相の要素を開集合とよぶ**，ただそれだけです．

問. 位相空間と距離空間はまったく独立したものですか？

答. 独立したものではありません.「距離空間から位相空間がきまる．しかし，そのようにしてきまる位相空間たちは，一般の位相空間たちの一部でしかない」というのが，ことの状況を明確に表現しているのではないでしょうか．たとえると,「日本語」という概念と「言語」という概念の関係になります．日本語は言語です．独立したものではないですね．でも「日本語学」は「言語学」を研究すればわかる，というのは短絡的です．日本語には，日本語だけにしかない性質もあり，言語学の一般論では片付きません．かと言って，日本語だけ知っていても日本語を研究できないでしょう．言語学がわかっていないと，日本語も深く理解できません．学問体系とは，そのようなものです．

問. 距離空間 (X, d) は距離位相を指定して位相空間になるとありましたが，(X, d) と $(X, \mathcal{O})$ は同じものなのですか？

答. もっともな質問ですね．一言で言えば，**集合としては同じだが，そこに付与されている情報が違う**ということです．昔の友人にひさしぶりに会ったら，少しスリムになっていて，話してみると大人びた考えに変わっていた，といった感じでしょうか．距離関数が決まっていれば，そこから距離位相が決まるので，位相だけを考えた時点で情報は減っているわけです.「位相的情報」だけが抽出された，とも言うことができます．

問. 距離空間上での開集合と位相空間上での開集合とでは違うものなのでしょうか？

答. 違います．より正確にいえば，**概念として異なります**．たまたま一致することもむろんありますが，どういう距離を定めているか，どういう位相を定めているか，によって異なってくることになります．具体例として，集合 $X = \mathbf{R}$ に，通常通り距離 $d(x, y) = |x - y|$ を定めて，それから距離位相をきめると，開区間 $(0, 1)$ は $\mathbf{R}$ の開集合ですが，閉区間 $[0, 1]$ は $\mathbf{R}$ の開集合ではありませんね．しかし，$X = \mathbf{R}$ に離散位相を定めると，離散位相に関して言えば，$(0, 1)$ も $[0, 1]$ も $\mathbf{R}$ の開集合です．このように１つの部分集合が**開集合であるかどうかは位相の入れ方によって異なってくる**ということに注意しましょう．

問. 距離空間には，距離位相でない位相を入れることができるはずですが，その位相から，写像 $X \to X$ の連続性を定義することができるのですか？写像 $X \to X$ の連続性は「開集合を開集合へ写す」だったと思うのですが，これによって連続を定義すると，これは距離空間から定義される連続と同じになるのですか？

答． 良い質問なのに，連続の定義が間違っていますね．連続の定義を間違えちゃダメダメ．写像が連続であるとは「開集合の逆像が開集合である」ということです．くり返します.「開集合の逆像が開集合」「開集合の逆像が開集合」「開集合の逆像が開集合」これが連続の定義です．それはともかく，位相が決まれば，写像の連続性が定義される，というののは良い指摘です．そして位相が違えば，同じ写像でも連続になったりならなかったりします．具体例で考えてみてください．

問． ★開集合の定義を人為的に作ってもよいのですか？

答． まさにその通りです．どんな部分集合系であれ，位相の条件を満たしさえすれば，位相と認められます．その位相に関して言えば，それに属する部分集合はどんなものであれ開集合と呼ぶのです．国を作ると法律を人為的に定めることになります．国が違えば，時代が違えば，法律は変わりますね．A 国の犯罪が，B 国では犯罪ではない，１９世紀では許されたことが２０世紀では許されない，ということはよくあることです．

問． 位相空間の定義で，(2)，(3) の条件の違いがよく分からないので，教えてください．

答． (2) は，開集合が有限個あったとき，それらの共通部分が開集合になるということですね．(3) は，開集合がいくつかあったとき (ここでは無限個でもよい)，それらの和集合が開集合になるということですね．(2) は有限個，(3) は有限個とは限定しない，というところが大きな違いです．なお，回答書 No. ５の最初の質問に対する答えも参考にしてください．

問． 距離位相の定義で，$\mathcal{O}$ を閉集合全体にとってはなぜいけないのですか？(1), (2), (3) は満たされていると思いますが．

答． うむ.「いけない」とは一言もいっていません．いろいろ試みてみるのはとてもよいことです．でも，残念ながら，閉集合全体については，(1), (2) はよいけれど，(3) は成立しません．なお，講義ノートや，回答書 No. ５の最初の質問に対する答えも参考にしてください．ただし，閉集合全体のみたす条件 (教科書 p.60 参照) から，位相を定義することもできます．

問． ★位相空間 $(X, \mathcal{O})$ で,「X の開集合」とよぶときに,「$\mathcal{O}$ に属する」など，付け加えなくてもいいのですか？

答． よい指摘ですね．その通りです.「X の位相 $\mathcal{O}$ に関する開集合」と言うべきです．そして，位相がすでに確定している場合 (あるいは，明白な場合) に「X の開集合」とよぶわけです．

問． $U_1, \dots, U_r \in \mathcal{O}$ の意味がよく分からないです．U_i は集合だから，$U_1, \dots, U_r \subset \mathcal{O}$ と表すべきではないでしょうか？とても気になります．

答． $\mathcal{O}$ は集合の集合なので，これでよいのです．$\mathcal{O}$ の要素は集合です．集合 X の部分集合がその要素です．したがって，X の部分集合は，$\mathcal{O}$ の要素であるか，$\mathcal{O}$ の要素でないか，のどちらかです．集合が要素になるなんて変じゃないか，と考えるかもしれませんが，たとえば，日本国は，日本人の集合ですが，国連のメンバーでもありますね．それと同じことです．

問． 位相空間の部分集合の内部について講義でやりましたが，内部の定義では，内点のことを語っていて， $\mathcal{O}$ のことは何も語っていないと思いました．位相とどう関係するのですか？

答． 位相空間における内点の定義に,「開集合」という言葉が必ず関わっているはずです．教科書 p.101 を見て下さい.「近傍」を使って内点を定義していますね．次に教科書 p.99 のおわりから p.100 のはじめの部分を見て下さい.「近傍」の定義に，ほうら,「開集合」が登場していますね．

問． 「近傍」がよくわかりません．a を含むすべての集合が a の近傍になるのですか？もはやこれは「近傍」と呼ばれるべき性質を何も持っていない集合では？

答． もっともな質問ですね．でも，まず,「a を含むすべての集合が a の近傍になる」というのは正しくなく,「a を含む開集合を含むようなすべての集合を a の近傍と定める」というのが正確です．(本当は，もっと正確に表現する必要があります．それが，教科書や講義で与えた定義です．) それから,「近傍と呼ばれるべき性質」を勝手に想定しているから，わからなくなってしまうのではないでしょうか？数学は文学ではないので，使う用語は厳密に定義されていて，その定義に基づいて使用されます．その際，日常感覚とずれることも当然あります．たとえば，宇宙物理で，時間を複素数まで広げて考えることがありますね．複素数の時間なんて，もはや時間と呼ぶべき性質を持っていないのでは，と考えたくなりますが，そのことで，この世界に関する認識が深くなるとすれば良いのではないでしょうか．

問． これまで距離空間の近傍が開集合だったのは，なにか特別な意味があるのですか？

答． なるほど．とくに特別な意味はありませんでした．確かに ε-近傍は開集合でしたね．距離空間では，それを考えれば十分だったからです．ちなみに ε-閉近傍 $\bar{N}(a, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq \varepsilon\}$ (ただし，$\varepsilon > 0$) というのも定義できます．

問． 近傍より，距離空間の ε-近傍のほうがピンとくるのですが．

答． 距離空間なら，確かに，ε-近傍だけで話がすんだわけですが，距離の指定されていない (あるいは，距離位相ではない) 位相空間を扱う場合は，ε-近傍という概念が定義できないですね．ε-近傍は距離を使って定義されたことを思い出しましょう．だから，位相空間の一般論では，仕方なく，近傍という概念で議論しましょう，ということです．しかし，そうしておけば，距離空間はもとより，それ以外の位相空間に対しても理論が適用できるので，**理論に汎用性が出てきて**，これはなかなかのものになるわけです．

問． a の近傍系というのは，a の開近傍全体の集合のことですか？

答． おしいけれど違います．a の近傍全体の集合のことです．

問．「開集合」の概念をもとに「近傍」の概念を定義した，とのことですが，どうしてもはっきりしません．

答． 近傍の定義をもう一度復習してください．絶対に,「開集合」という言葉が，定義の中に出てくるはずです．以前からお話しているように，**位相の基本は開集合にあり**．開集合を語ることは，これすなわち，位相を語ることになります．

問．「X の開集合 U があって，$a \in U, U \subset A$」ならば「X における a の近傍 N があって，$N \subset A$」がしっくりきません．

答． $N = U$ ととれば良いのです．(開近傍は近傍です．)

問．「集合系」は「冪集合」と同じことですね．

答． いいえ，違います．冪集合の部分集合です．

問． コンパクトの定義における,「有限個で覆える」を,「任意の開集合の列が，ある意味収束する」とすると点列コンパクトの定義と類似すると思いますが，この「ある意味収束する」を数学的にきちんと定義できるでしょうか？

答．「フィルター」という概念を定義した上で，きちんと定義できると思いますが，ともかく，この質問は時期尚早でしょう．もう少し修行してください．

問． 位相に大小はありますか？

答． あります．同じ集合上の位相は比べられます．集合 X 上の位相 $\mathcal{O}$ は，(位相の条件をみたす) 部分集合系ですね．X 上の別の位相 $\mathcal{O}'$ もそうです．そこで，$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ のとき，位相 $\mathcal{O}$ は位相 $\mathcal{O}'$ より**小さい**とか，**弱い**とか，**粗い**とか言います．たとえば，密着位相は離散位相より弱い (小さい，粗い) と言えます．またそのとき，位相 $\mathcal{O}'$ は位相 $\mathcal{O}$ より**大きい**とか，**強い**とか，**細かい**とか言います．離散位相は密着位相より強い (大きい，細かい) と言えます．また，大小関係のつかない位相もあります．

問． 離散位相は「$\mathcal{O}$ として X の部分集合からなる集合系」を考え，距離位相は「$\mathcal{O}$ として X の開集合からなる集合系」を考えるとありますが，X の開集合はすべて X の部分集合なので，X の距離位相は，離散位相としてよいのですか？

答． ダメです．離散位相が距離位相より位相として強い，ということしか言えません．

問． $X = \{1, 2\}, \mathcal{O} = \{\emptyset, \{1\}, X\}$ としたとき，$A = \{1\}$ について A^a(A の閉包)$= \{1\}$ だから，$(A^a)^c = \{2\}$ が開集合で，$\{2\} \notin \mathcal{O}$ となり，何か矛盾があるような気がします．この考え方のどこに矛盾があったのでしょうか？

答． $A^a = \{1\}$ という部分に根拠がありませんね．この位相に関しては，$2 \in X$ は，A の外点ではありません．A の触点です．(定義に従うとわかります)．従って，$A^a = X$ です．

問．「１点からなる集合は閉集合」というのは，距離空間だからですか？

答． その通りです．本によっては，１点からなる集合は閉集合に限るような位相空間を T_1 空間と呼んでいます．距離空間は T_1 空間になります．

問． ある本で目にしたのですが,「Hausdorff 位相空間」とはどのような位相空間なのでしょうか？

答． 位相空間であって，次の性質を持つもののことです：「その空間の任意の異なる２点 x, y について，x を含む開集合 U と y を含む開集合 V が $U \cap V = \emptyset$ となるように取れる.」たとえば，距離空間に距離位相を入れれば，Hausdorff 位相空間です．じっさい，$d(x, y) = d$ とおくと，$d \neq 0$ だから，U と V をそれぞれ x と y の $d/3$ 近傍にとれば良いわけです．このように，**距離空間はハウスドルフ空間の重要な例**です．ハウスドルフ空間は，T_2 空間とも呼ばれます．距離位相 $\Rightarrow$ Hausdorff $(= T_2) \Rightarrow T_1$.

問． 距離位相と離散位相が同じになるような距離空間はありますか？

答． あります．離散距離をとれば，どんな集合についても，その距離からきまる距離位相は離散位相です．

問． $X = \mathbf{R}, A = [0, 1]$ のとき，$(\frac{1}{2}, 1]$ は A の開集合になるのですか？以前やった ε-近傍による定義からすると，$(\frac{1}{2}, 1]$ は $[0, 1]$ の開集合にならない気がします．

答． 開集合です．ε-近傍で考えても開集合です．$a \in A$ の A における ε-近傍は，$\{x \in A \mid |x - a| < \varepsilon\}$ であることに注意して，もう一度考えてみてください．

問．「相対位相」について，もう一度詳しく教えてください．相対位相の定義はどのように導かれたのでしょうか？天下り式に定義したものですか？

答． $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とします．X の部分集合 A があったとき，いかにして A に位相を入れるか，何か自然なやり方はないか，というのがここでの問題です．いま，$A \subset X$ なので，包含写像 (inclusion) $i : A \to X$ がありますね．$i(a) = a \in X (a \in A)$ が定義です．さて，A 上の位相のうち，この**包含写像が連続になるような位相のうち，もっとも弱い位相**に注目しましょう．(A の位相を強くすれば，i は連続になりやすくなります．たとえば，A に離散位相を入れれば i は連続になります．) すると，X の開集合 U について，その i による逆像 $i^{-1}(U)$ は，A の開集合でなければなりません．そうしないと，i は連続にならないわけですね．ここで，$i^{-1}(U) = \{a \in A \mid i(a) \in U\} = A \cap U$ に注意すると，$\{A \cap U \mid U \in \mathcal{O}_X\}$

は，いま定義しようとしている位相 $\mathcal{O}_A$ に含まれる必要があるわけですね．ところが，A の部分集合系 $\{A\cap U \mid U\in\mathcal{O}_X\}$ は A の位相の条件をみたすので，$\mathcal{O}_A=\{A\cap U \mid U\in\mathcal{O}_X\}$ とおいたわけです．これは，A の位相ですが，X の位相から誘導されたので，相対位相とよびます．なにも断わらなければ，位相空間の部分集合には相対位相を入れて位相空間とします．相対位相を入れた部分集合を「部分位相空間」あるいは，単に「部分空間」とよぶことがあります．

問． $A\subset X$ の相対位相 $\mathcal{O}_A$ について，位相の条件のうち， $A\in\mathcal{O}_A$ がわかりません．

答． $A=A\cap X$ で，$X\in\mathcal{O}_X$ なので，$A\in\mathcal{O}_A$ です．

問． ★位相空間には次元は定義されるのですか？

答． 定義されます．被覆次元やハウスドルフ次元などがあります．数学辞典第３版 (岩波書店) の項目 151 を読んでください．

問． 教科書の記号 $\cup\mathcal{S}$ を説明してください．

答． ここでは，$\cup\mathcal{S}$ は，ある集合の部分集合系ですね．つまり，部分集合の集合です．ここまでは良いですか．それらの部分集合たちの和集合という意味です．たとえば，$\mathcal{S}=\{\{1\},\{1,2\},\{2,3\}\}$ のとき，$\cup\mathcal{S}=\{1,2,3\}$ ちゅうことやね．

問． 予習していて,「拡張」という言葉がでてきたのですが，これは，縮小写像の「縮小」という言葉と，数学的に何か関係があるのですか？

答． 数学の慣用からすると,「拡張」(extension) と対になるのは「制限」(restriction) です.「拡大」(expanding) と「縮小」(contracting) が対になります．関数や写像の定義域を広げるのが「拡張」で，定義域をせばめるが「制限」です．距離空間の間の写像で，距離を広げるのが「拡大」写像で，縮めるのが「縮小」写像です．ただし,「代数拡大」の場合の「拡大」は extension の訳です．

問． 定理：鵜呑みにしていては身につかない．(鵜に関する第１定理)．証明 :「『鵜呑み』といえば，長良川の鵜飼いの鵜のことである」という鵜に関する第零定理 (仮説) を仮定する．身につける為には食料が胃に達する必要がある．が,「第零定理 (仮説)」より,「鵜呑み」の鵜は鵜飼いの鵜なので，(魚を) 丸のみした途端に鵜匠に首を絞められ飲み込むことができず，従って魚は胃に達することもなく，消化できない．以上から魚は身につかず，定理は証明された．Q.E.D.

答． よくわかりませんが，使用する言葉の定義や，仮定している事項は，**定理を述べる前に明示する**ということが基本的なので，それには注意しましょう．

問． ★ ε-δ 論法はいつごろ生まれたのですか？それ以前の連続，収束の定義はどういうものだったのでしょうか？

答． コーシー (Cauchy) が，連続，収束の定義を明確にするために導入したと認識しています．それまでは，定義がなかった，暗黙の了解事項だったということでしょうか．つまり，厳密な定義を必要としないような，良い対象のみを扱っていたということも言えますね．あるいは，コーシーの時代に数学が大衆化 (= 科学化) し，パブリックに共有できる定義を必要としたからかもしれませんね．

問． 集合系と集合族の違いはあるのでしょうか？

答． ありません．たとえば，いくつかの関数の集まりの場合は，関数系とも言えるし，関数族とも言えます．ところで，質問内容と関係ないのですが，この質問以外でも何人かの人が，ボールペンを使って質問を書いているようです．質問 (や答案) を読む立場から言うと，鉛筆 (かシャープペンシル) と消しゴムを用意して，それで書いてほしいなあ，と思います．修正箇所が黒く塗られたボールペンの文章を見ていると，あまり愉快ではありません．もし，入社試験 (入学試験) だったら即不合格になりかねません．そう言えば，モーツァルトはすでに頭の中に音楽ができあがっていたので，スラスラと名曲を書き上げたのか，楽譜に修正された跡がまったくないそうですね．モーツァルトぐらいの天才ならよいのでしょうか．まあ，清書する時間がたっぷりある状況以外では，必ず鉛筆に消しゴムを使いましょう．(こんなことを書いている説教くさい自分がいやになりますが，仕方ないのでしょうか．)

問． ワークシートが少し簡単なような気がします．まじめにやっている人と，他人のを写している人に差がつかないと思います．

答． わざと簡単にしています．北大生がするはずはないと思いますが，万一，こんな簡単なレポート問題を自分で考えないで他人のを写している人がいたとしたら，君，自分で頑張って解く努力をしなさい．他人の答案を丸写しする自分を恥じなさい．北大生としてのプライドを持ちなさい．友達とは意見交換するだけにとどめなさい．そうしないと，就職してからも，他人の企画書を写して仕事をしていくことになるよ．**他人は自分の人生の企画書を書いてはくれないぜ**．自分の頭だけが頼りなんだぜ．それから，万一，友達に自分のレポートを見せている人がいたら，君は，かえって「友達がい」のない行為をしていることを認識して，即刻やめなさい．そんなものは優しさではない．友達の勉強の機会を奪っていることを認識しなさい．他人に答案を丸写しさせている自分を恥じなさい．それから，それを指摘してくれた君，ありがとう．でも，そんなことはあまり気にするなよ．気にしてしまう自分をすこしだけ恥じよ．自分では何も考えずに，要領よく生きていく人間は，世の中に出たらゴマンといるさ．そんな奴のメッキは，１０年ではがれるさ．気にしないで生きていけばいいのさ．そして，こんなつまらない文章を書いている私 (石川) は，自分を大いに恥じております．ともかく今年もよろしく．