

数学序論 1 1 質問の回答 担当教官 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

No. 7 (1999年12月1日) の分

問. コンパクト集合の定義をわかりやすく説明してください.

答. 旅行に行くとき, 荷物はコンパクトにまとめる必要がありますね. 普段使っている無限のアイテム全てはもっていけないので, 旅先で必要な有限個のものを精選していく, その有限個で普段の生活がカバーできる, そんな生活をコンパクトという, というのがまあまあ良いかと思えます. あれも必要, これも必要と, いつまで経っても持ち物が決まらない, もっていくなら, 無限個の鞆が必要というような生活はコンパクトでない, ということかな. 「人生を複雑にしない」という精神は, 「コンパクトな生活をめざす」と言い換えられるかもしれません. それはともかく, (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合としたとき, A がコンパクト集合であるとは, $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となる開集合の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を**任意に与えるとき**, その開集合の族の一部分で有限個の $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots, U_{\lambda_r}$ ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \Lambda, r$ は自然数ならなんでもよい), があって $A \subset \bigcup_{i=1}^r U_{\lambda_i}$ となるとときに言います. ある種の「扱いやすさ」を指し示す概念です. コンパクトなら成り立つが, コンパクトでないと成り立つとはかぎらない, という定理がたくさんあります.

問. コンパクト性の定義で, 「 $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となる開集合の族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (開被覆)」の取り方は決まっているのですか?

答. 決まっています. **任意です**. 任意の開被覆に対し, 「有限部分開被覆」が選べるというのがコンパクト集合の定義です.

問. 「 A がコンパクト集合 $\Leftrightarrow \exists U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}$, s.t. U_{λ_i} は開集合 ($1 \leq i \leq n$) かつ $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$ 」という定義ではどうですか? 先生が示した定義では, まず A の開被覆が存在してその開被覆の部分集合の有限個の和集合に A が含まれる, という定義でしたが...

答. ダメです. 誤解です. 「 A の開被覆が存在して」ではなく, 「 A の**任意**の開被覆について」です. 開区間 $(0, 1) \subset \mathbf{R}$ はコンパクトではありません. それは, ある開被覆があって, 有限部分開被覆がとれないからです. たとえば, $U_\lambda = (0, \lambda), \frac{1}{2} \leq \lambda < 1$ はそのような開被覆を定めます. そこから有限部分開被覆はとれません. ここで, $\lambda < 1$ というところがミソです. わかるかな? (添字の集合はこの場合 $\Lambda = [\frac{1}{2}, 1)$ というわけです).

問. ★「コンパクト」の定義の内容を見ていると, 距離空間という概念が使われていないと思います. 「 (X, d) 距離空間」という部分は必要なのですか?

答. するどいですね. X は距離空間でなくても, 位相空間であればよいです.

問. コンパクトの定義で, U_λ と U_{λ_1} とはまったく違う集合という意味ですか?

答. $\lambda \in \Lambda$ であり $\lambda_1 \in \Lambda$ です. ともに, 開被覆のメンバーです.

問. 開被覆の定義は何ですか?

答. $A \subset X$ の開被覆とは, X の開集合のある集まり $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (Λ の濃度は何でもよい) であって, A を覆うもの, つまり, $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となるもののことです.

問. 「コンパクト」などの考え方は主にどういう時に役立つのでしょうか? 何だか一般的すぎてよくわかりません.

答. 一般的なことを理解するには, 具体例をたくさん観察するのがよい方法です. たとえば「全ての人間に人権がある」ということを理解するには, 近所の人とつきあったり, 外国から来ている人たちと友達になったり, テレビでニュースを見たり聞いたり, 文学書を読んだりしていくうちにわかってくるのかな, と思います. たとえば「コンパクト集合上の実数値連続関数には最大値最小値が存在する」ということも, 「 $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合上の実数値連続関数には最大値最小値が存在する」ということを先に納得していないと, ピンと来ないでしょう. 「 $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合」という概念の本質をつきつめていった結果, 得られた**究極の概念**が「コンパクト集合」なのです.

問. 「開被覆」というものはありますか? コンパクトの定義で, 開被覆の代わりに閉被覆を使うとどうなりますか?

答. 考えられないこともないですが, あまり使われません. それを使うと, コンパクト性の定義が歪められます. その誤った定義では, (1点からなる集合が閉集合なので) 「 $\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合は有限集合である」などと変なことになってしまいます.

問. 被覆という言葉は, 「被覆空間」とか「被覆写像」というのでも聞きましたが, 「開被覆」と関係はあるのですか?

答. とりあえず関係ありません. 「被覆」とは, 「おおう」あるいは「おおうもの」, covering という意味で, 「被覆空間」も「開被覆」も, ともに「おおうもの」ではありますが, 数学的に直接の関係はないといえますね.

問. 「有界閉集合」と「コンパクト」の関係がわからなくなりました.

答. $X = \mathbf{R}^n$ という場に限れば, 「有界閉集合」ということと「コンパクト」ということは結果的に

同じ条件になります。 X が距離空間ならば「コンパクト $\Rightarrow$ 有界閉集合」はいえます。逆は言えません。講義で反例を挙げました。

問. 位相を入れることのイメージがわかりません。位相を入れることによってどうなるのでしょうか？「位相を入れる」とは「開集合を決める」ということでしょうか？そうすると、決めた開集合以外は開集合ではないのでしょうか？

答. まったくその通りです。

問. 開集合であることの否定は閉集合であるのですか？

答. 違います。「開集合である」の否定は、もちろん「開集合でない」です。「閉集合である」ではありません。ちなみに「有界閉集合である」の否定は、「有界集合ではないか、または、閉集合でない」です。ところで以前、開集合と閉集合の説明で、「窓が全部開いている部屋」と「窓が全部閉じている部屋」の話をしました。「窓が全部開いている部屋」であることの否定は、「閉じた窓がある部屋」であって、「窓が全部閉じている部屋」ではありませんね。出かけるときに戸締まりする場合、「窓が開いていないかい」と聞かれたとき、「それは、すべての窓が閉じているか、という意味かい、それとも、居間の左側の窓が閉じているか、ということかい、いま、右側の窓は改築工事中で閉まらないけど、いいのかい」と、家族の間でも聞き返した方がよい場合もあります。まあ、家族同士よくわかっていて誤解がない場合は、そんなにくどくど言わなくても意思が通じるかもしれませんが、もし仕事上などでは、同じような状況で、もし相手の意思の確認をとらなかったら、あとあと責任問題になりかねませんね。数学でも同じで、厳密に議論を進めていかないと、とんでもなく馬鹿げた結論が出てしまいかねません。

問. ★距離空間では、部分集合 $A \subset X$ について「点列コンパクト $\Leftrightarrow$ コンパクト」とのことですが、一般の位相空間で、点列コンパクトだけコンパクトでないような例はありますか？

答. 私(石川)は具体例を知りません。「位相空間論」と題名のついた専門書には、たぶん例が載っていると推測します。実は、点列コンパクトは、距離空間でのみ有効な概念であり、一般には、(いままで考えてきた)可算点列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の代わりに、もっと一般的な(ある種の)順序集合に添字をもつ「点列」に関係して定義される条件が、コンパクト性と同値になる、ということが知られています。

問. 講義に出てきた定理「 A が点列 compact $\Rightarrow A$ の開被覆 $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ に対し、 $\exists \varepsilon > 0, \forall a \in A, \exists \lambda \in \Lambda, N(a; \varepsilon) \subset U_\lambda$ 」はどのように証明するのですか？

答. 背理法で示せます。そのような $\varepsilon > 0$ が無い、と仮定して矛盾を出します。つまり、どんな $\varepsilon > 0$ に対しても、 $a \in A$ があって、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して、 $N(a; \varepsilon) \not\subset U_\lambda$ として矛盾を出します。 ε とし、特に $\frac{1}{n}$ をとり、それに対して存在するはずの a を a_n とおくと、点列 $\{a_n\}$ ができるわけですが、 A が点列コンパクトなので、 A の点に収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ がとれるはずで、その極限を $a \in A$ とおくと、 $\exists \lambda, a \in U_\lambda$ であり、 U_λ は開集合だから、 $\exists \delta > 0, N(a; \delta) \subset U_\lambda$ である。すると、 $\exists N, k \geq N \Rightarrow \left[a_{n_k} \in N(a; \frac{\delta}{2}) \text{ かつ } \frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2} \right]$ であるから、 $k \geq N \Rightarrow N(a_k; \frac{1}{n_k}) \subset N(a; \delta) \subset U_\lambda$ となり矛盾が生じます。この議論を自分で整理してみてください。

問. ルベーク数のルベークは、ルベーク積分のルベークと同じですか？

答. 同じルベークという数学者です。ルベーク積分と距離空間の理論は、もちろん違う話ですが、関連する局面も多くありますね。まあ、その場面場面で良い結果を出したルベークという人は偉いということでしょうか。

問. 「点列コンパクトでない」の定義で、点列 $\{a_n\}$ のどの部分列も収束しないということが出てきますが、それはどういうことですか？

答. たとえば、 $X = \mathbf{R}$ で $a_n = n$ はそのような点列です。(ちなみに ∞ は数ではありません。数列の状況を示す単なる記号です。)

問. コンパクト集合の部分集合はコンパクトになりますか？

答. なりません。そうならない例を挙げましょう。閉区間 $[0, 1] \subset \mathbf{R}$ はコンパクトですが、开区間 $(0, 1) \subset [0, 1]$ はコンパクトではありません。

問. コンパクトな位相空間から位相空間への連続写像があるとき、その像はコンパクトになりますか？

答. なります。コンパクト性の定義からすぐにわかります。自分で証明してみてください。

問. 無限次元ヒルベルト空間は (ℓ^2) 空間と同型ですか？

答. 「可分」であればそうです。ヒルベルト空間論の本を見て下さい。

問. 距離関数が定められないものはありますか？たとえば、札幌の市電の料金は一律 170 円ですが、 a を市電に乗った駅、 b を市電を降りた駅とすると、 $d(a, b) = 0 (a = b), d(a, b) = 170 (a \neq b)$ と、市電の料金に対しての距離関数すらも定めることができます。

答. なるほど。では、地下鉄の料金ではどうでしょう？地下鉄、バス、市電すべてを考えると札幌市営交通の料金については距離関数は考えられますか？考えて報告してください。

問. 一様収束の定義について、 $\sup$ は必要ですか？別の授業では、一様収束の定義について、 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ と習ったような気がします。「 ε が x に依存しない」ということが各点収束との大きな違いだと聞きました。

答. 必要です. 上にある定義は, 正確には, $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, \forall x \in X, n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ だったと推測します. つまり, $\varepsilon > 0$ を取るごとに, 点 x の取り方にはよらずに N が選べるというところが大切な部分です. 「 N が x に依存しない」の聞きまちがいのと思います.

問. 各点収束というのは一様収束に比べてあまり重要ではないのですか?

答. そうですね. 一様収束の方がよい自然な収束性であり重要である, と私 (石川) は考えます.

問. 一様基本列や一様収束や一様連続の「一様」とはどんな意味ですか? 一様の反対は何ですか?

答. 「一様に」は, 「いっせいに」とか「共通に」とか「足並みそろえて」とか「お手手つないでみんなで一緒」といった意味あい使いますね. 2人3脚, 3人4脚, 4人5脚みたいなものです. 「一様」の反対 (対義語) は「ばらばら」です.

問. 一様収束の定義は, 「 $\forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 」と基本的に覚えているのですが.

答. 違います. $\forall$ と $\exists$ の順序が違います. むやみに覚えようとするから間違えるのだと思います. 「一様に収束する」という意味あいを理解した上で身につけましょう. そうすれば間違えても, 間違えたことに自分で気付くことができます. 正確な定義は, 「 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall x, \forall n, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 」です. 講義で与えた定義は, 見た目は違いますが, 同じ内容を上限の言葉で書き換えたものです.

問. 一様収束の時に, $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$ とありますが, なぜ, $\frac{\varepsilon}{3}$ なのですか?

答. 一様収束連続関数列の極限が連続ということの証明の途中のところですね. 最終の結論で ε になるようにして, 見やすくするための工夫です. いま, 仮に実数 ε に関係する命題 $P(\varepsilon)$ があったとしたとき, 「 $\forall \varepsilon > 0, P(\varepsilon)$ が成り立つ」ということと, 「 $\forall \varepsilon > 0, P(\frac{\varepsilon}{3})$ が成り立つ」ということは, 同じことです. ね. だから, よいわけです. 3日間の生活費が3000円しかないときは, 当然それにあわせて, 1日1000円で生活するのは当然ですね. もちろん, 1日500円で我慢して, 貯金してもかまいません.

問. 他の授業で習った広義一様収束と, この授業の一様収束の関係を教えてください. 一様収束に対して, 広義一様収束はますますイメージしづらく感じます.

答. 広義一様収束は, 広義の一様収束です. 広義一様収束ということは, 各コンパクト集合上に限れば一様収束する, ということです. もともと関数列が定義されている空間の上では一様収束するとは限らないけれどね, ということです. たとえば, 極限の連続性が成立することを示すためには, 各点の近傍で考えればよく, (空間が局所コンパクトなら) 近傍としてコンパクトな近傍をとり, その上で, 一様収束するということを使って, 連続性が言える, などという風に用います.

問. X がコンパクトなら, $f, g \in C(X)$ について $\delta(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\} < \infty$ となるのはなぜですか?

答. X 上の連続関数 $f - g: X \rightarrow \mathbf{R}$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ を考えるのがミソです. ミソというのは味噌汁の味噌ではなく, キーポイントという意味です. コンパクトな集合の上の連続関数は最大値をもつので, 上限はその最大値に一致し, したがって有限になります. $< \infty$ は有限という意味です.

問. $\delta(f, g) = \infty$ とは, どういう時ですか?

答. 例を挙げましょう. $X = \mathbf{R}$ で $f(x) = x, g(x) = 0$ とおくと, $\delta(f, g) = \sup\{|x| \mid x \in \mathbf{R}\} = \infty$ ですね. (上限が ∞ と書いているのは, **上に有界ではなく, したがって上限が存在しない**ということの意味していることは, 微分をちゃんと勉強していれば, よくわきまえているはず, と皆さんに期待しています).

問. $\delta(f, g) = \infty$ のとき, どうして距離ではないのですか? 距離関数の条件は満足しているような気がします.

答. ∞ は実数でないからです. 距離関数は $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ なので, その定義の中に, 「各 $(f, g) \in X \times X$ について, $d(x, y)$ は実数である」という条件が含まれていることに注意しましょう. $\delta(f, g) = \infty$ のときは, それに抵触するわけです.

問. (教科書で実連続関数環を扱っていますが,) 複素連続関数環というものは存在するのですか?

答. あります. 複素数値の連続関数 $f: X \rightarrow \mathbf{C}$ の全体に, 自然に加法乗法を定義したものです.

問. ★「 f_n が一様収束するならば $\times \times \times$ 」等の問題を良く見かけますが, この「一様収束」とは使い物になるのですか? 私達が今まで見てきた解析関数は, Taylor 展開出来る等の性質のお蔭で, 私達でも扱えた筈ですが, その Taylor 展開には x の高次の項が多く現れ, $\mathbf{R}$ 全体で定義された関数でも Taylor 級数が「一様収束」しません. 「解析関数」ですら, 関数全体からは, かなり小さく, 性質も良かった筈なのに, その Taylor 級数ですら一様収束しないとすると, 実用的な条件とは思えません.

答. なるほど. 自然ですぞい疑問ですね. でも「広義一様収束」という概念は役に立ち, 広義一様収束の研究は, やはり一様収束の理論を基礎にしているわけで, やはり, 一様収束が使い物にならない, という発想はやや短絡的であると考えられます.

問. $\{f_n\} \in C(X)$ について, f_n が f に一様収束するならば, $f \in C(X)$ というのは明らかじゃないですか? 明らかなことを証明することは数学において非常に大切ということはわかっているのですが.

答. 質問にある「明らかな」という意味が明らかでないですね. それは「明らかなような気がする」というだけだと思います. なんとなくそう思いたい, ということはわからないでもないけれど, そのような

「理由のない妄想」に捕らわれてはいけません。「根拠のない風説」に流されてはいけません。ところで、質問とはまったく関係なくて恐縮ですが、現在、国立大学を「独立行政法人」(たとえば「準私立」)にしようという動きがあります。ここはその是非を論ずる場ではありません、が、この動きの背景の1つに「すぐに利益につながらない学問は必要ないという発想」があります。このような発想が機会あるごとに頭をもたげるのは、「われわれにとって本当に大切なことは何か、人間にとって本当に大切なこと、愛や真理や文化や福祉や環境などは、経済原理に乗らない」ということがわかっていないからかも知れませんね。たとえば、日本国の森林を守る林野庁が、「赤字だ赤字だ」と攻撃される。日本の環境を守ることは、国の行政が中央集権的にやるべきことであって、こういうことにこそ税金を注ぎ込むべきですね。なぜ公共事業として山に木を植えないのでしょうか。そうっていないのは、結局、国民の意識が低いからだと思います。かつての古代文明の地が砂漠化しているということに注目すべきことでしょう。ところで、以前「日本は経済大国」とか言われていました。私(石川)は常々それに疑問を抱いていたのですが、やはりメッキがはがれて、「日本は貧しい国である」ということが明らかになってきました。「きんらんどんす」じゃなくて「ひんすればどんす」と形容するのが適当なのが現在の日本の状況です。**金銭的に貧しいというより、考え方が貧しいですね。**「なんの為にわれわれは生活を豊かにしようとしているのか」「日本人として人間として何を誇りに思いたいのか」ということに、もう一度思い至らないといけないのではないのでしょうか。質問と関係ないことを書いてしまいました。

問。講義中に $\delta(f, g)$ を導入し、距離ではないけれど、あたかも距離のように考え、『 X 上の連続関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束 $\Leftrightarrow C(X)$ の点列 $\{f_n\}$ が $f \in C(X)$ に「収束」』と定義してしまったりしていますが、そんなあいまいなものを使ってよかったのですか？ X がコンパクトでないのなら、『...』の定義をうのみにして信じる勇気がありません。

答。距離ではないですが、あいまいなものではありません。だから支障はないと思います。ところで、(言葉尻をとらえるようで、悪いですが) 上の『...』は定義ではありません。それより前に一様収束の定義をしました。そのあとで、 $\delta(f, g)$ を導入し、それを用いて一様収束性の「言い換え」をしたわけです。それから、何ごとであれ「うのみにして信じて」はいけません。長良川の鵜(う) 飼いの鵜ではないのだから。また、うのみにして信じることを「勇気」とは言わないと思います。**どんな状況でも冷静に判断して、信念にしたがって行動することを勇気と言うんだ**、と私(石川)は考えますが、いかがでしょうか。

問。閉区間 $[0, 1]$ で定義された連続関数で、 $[0, 1]$ の各点で微分可能でない関数の具体例を挙げてください。

答。補足説明に構成する試みが書いてありました。よさそうですが、**よさそうなことと、証明できることは違うこと**なので、その構成したものが、実際に連続であり、各点で微分可能でない、ということの証明を、自分で付けてみてください。レポートとして私(石川)に提出してくれば、ていねいに添削してあげますよ。

問。回答書 No.4 の「4次元というものを想像するのに、自分達が想像するのに得意な3次元に、1次元である時間を無理して加えて...」という回答で、「無理して」と言ったのはなぜですか？僕が思うに、時間を入れた4次元空間は、時間について自由度がない(時間を行き来できない)ので、一般の4次元空間とはならない、という事なのでしょう？

答。それほど深い(?) 意味ではなく、たて、よこ、高さ、に比べて、時間はいかにも異質であるということのを言いたかっただけです。啓蒙書に、4次元といえば、空間の3次元と、時間の1次元をあわせて4次元、と判を押したように1つ覚えて書いてあるので、それに反発したまでです。

問。「 ϵ - δ 論法」を勉強するのにおすすめの本があったら教えてください。

答。皆さんが1年生のときに使った微分積分の教科書が一番よいと思います。あえてそれ以外で挙げるとすると、最近出版された、飯高茂 編／監修「微積分と集合、そのまま使える答えの書き方」講談社、2000円、は非常にわかりやすいと思います。題名だけみると、単に数学の解答を暗記して丸写しすることをすすめている本のように誤解するかも知れませんが、そうではありません。われわれ大学の数学のプロの教師と、高校の数学には慣れているが大学の数学にとまどいを感じる学生諸君の溝をうめるために、大学で学ぶための基本的事項、いわば「数学語」を懇切丁寧に解説しています。数学語の自習書ですね。数学も、ある段階までは語学の勉強と同じで、基本的なことをくり返しくり返し勉強しないと、なかなか身に付かないものですね。特別な天才は別としても、やはりはっきり示してもらわないとわからないこともありますよね。「 ϵ - δ 論法」などを含め、そのような「数学語」を身に付け、数学を自力で論理的に考えることができるようになるための、その前段階としての訓練 (practice) をすることができるようになっている本です。

問。幾何1も受けたのですが、質問とかは無視して、ネタ的にそっちの方がおもしろかったです(僕的に)。ミカン星人とかリング星人とかから数えることの一般概念を導くのとかが好きでした。また時々ある小ネタも、つまらなくても(つまらないところがおもしろい)良かったのに、減ってしまって残念です。

答。正確には、「みかん国」「りんご国」です。「つまらない」と「おもしろくない」の違いがよくわかりませんが、誉めてくれているらしいので、ありがとう。今後ともよろしく。