数学序論１１質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 6 (１９９９年１１月２４日) の分

問. 実数の連続性と完備性はどのようにつながっているのでしょうか？別の講義で，同値な概念と習ったのですが.

答. 同値です．以前，有理数の全体の集合 $\mathbf{Q}$ から，デデキントの切断の方法で，実数を構成する話をしましたね．その際，使ったのは，$\mathbf{Q}$ の順序構造だけでした．ですから，この段階では，$\mathbf{R}$ の連続性と，距離空間の話である完備性とは無関係に見えます．しかし，$\mathbf{Q}$ には加減乗除の構造 (体の構造) があり，デデキントの切断の方法で，$\mathbf{R}$ を構成すると，自然に $\mathbf{R}$ に加減乗除の構造 (体の構造) が入ります．したがって，$\mathbf{R}$ では引き算が定義でき，また，絶対値の概念が定義できる ($|a| = \max\{a, -a\}$) ので，$\mathbf{R}$ の距離 $d(x, y) = |x - y|$ を定めることができます．(もともと，距離関数の定義でも，$\mathbf{R}$ の加法と順序を使っていることにも注意しましょう)．さて，このように距離を確定した後は，両者の関係を論ずることが可能になります．このとき,「実数の連続性」を用いて,「実数の完備性」が示され，逆に,「実数の完備性」を用いて,「実数の連続性」が示されます．そういう意味で，２つの概念は同値になります．以前，回答書 No.2 で,「実数の連続性」と「上限定理」(上に有界で空でない $\mathbf{R}$ の部分集合には上限が存在する) が同値である，という説明をしました :「実数の連続性」を明確に定義しないと話になりませんが，実数の切断 $(A \mid B)$ を考えたとき,「A に最大数があるか，または B に最小数がある」ということを意味しているとすると,「上限定理」から $a = \sup A$ ととれば，もし $a \in A$ なら A の最大数であり，もし $a \in B$ なら B の最小数であり,「実数の連続性」が導かれます．講義で示したように,「実数の連続性」から「上限定理」が導かれるので，結局，両者は同値である，ということです (再掲)．さらに,「上限定理」から,「コーシー列は収束する」ということが示されます (教科書 p.24)．また逆に,「コーシー列は収束する」ということから,「上限定理」が示されます．($A \subset \mathbf{R}$ を上に有界で，$A \neq \emptyset$ とします．まず，A から１つの要素 $a_1 \in A$ をとり，また，A の１つの上界 a_2 をとります．$a_3 = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$ (a_1 と a_2 の中点) とおき，もし，a_3 が A の上界ならば，a_4 を a_1 と a_3 の中点と定め，もし，a_3 が A の上界でなければ，a_4 を a_2 と a_3 の中点と定めます．この選択をくり返して，数列 a_n を決めると，これはコーシー列であり，その極限が求める上限になります．) 結局,「実数の連続性」と「コーシー列は収束する」こと，つまり「実数の完備性」の同値性が示されました.

問. 完備性を示すには，任意のコーシー列が収束することを調べる必要があり，大変なような気がします.

答. その通りです．しかし，一旦ある距離空間 (X, d) が完備であることが示されたなら，X の閉集合 A に距離関数 d を制限して，距離空間と考えたもの (A, d) (部分距離空間．同じ記号 d を流用しました) も完備になります.

問. $X = C[a, b]$ (閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数の全体の集合)，$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ について，(X, d) が完備距離空間でない，とのことですが，理由がわかりません.

答. 収束しないようなコーシー列が存在するからです.「距離空間が完備 $\Leftrightarrow$ すべてのコーシー列が収束する」なので，収束しないコーシー列が存在する，ということから，完備でない，ということが導かれますね．では，そのようなコーシー列の存在を示すには，どうすればよいか．具体例を１つ挙げればよいですね．教科書にあります．p.74 の例 3 と問 10.2 を見て下さい.

問. ★同じ集合でも，距離関数が異なれば，完備になったり，ならなかったりする例を見たわけですが，完備であることを言えるように距離を決めることが大切な気がしますが，どうでしょうか？

答. なるほど．でも，何か具体的な問題を解決する場合は，その問題にとって自然な距離関数があり，それを調べなければならない，ということがあると思います．この距離じゃなきゃダメなんだ，ということですね．たとえば，有理数全体の集合 $X = \mathbf{Q}$ で，有理数の「配列の仕方」を調べようとすると，やはり，通常の距離 $d(p, q) = |p - q|$ を考えるのが自然だと考えます．0.1 と 0.11 の距離は 0.01 といった具合です．でもそれが完備ではない，そういう場合どうするか，ということですね．$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \ldots,$ はコーシー列ですが，(有理数の範囲では) 極限がない．さてどうするか．$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \ldots,$ はコーシー列ですが，極限がない．さてどうするか．１つの解決方法として，**考えている集合 (空間) を広げて，その広げたところに，もともとの距離関数を保ったまま距離関数を拡張し，その広い空間では完備であるようにする**，というものがあります．これが「完備化」という方法であり，現代の解析学において基本的です．有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ は完備でないので，それを「完備化」して，実数全体の集合 $\mathbf{R}$ を考えたと言えます．だからと言って，有理数が大事でないというわけではなく，世界を広げることによって，もともとの対象が深く理解できる，という側面があります.

問. (X, d) が完備 $\Leftrightarrow$ コーシー列は収束，とのことですが,「コーシー列は常に収束する」ので，意味がないような気がします.

答. 意味があります．$\mathbf{R}$ や $\mathbf{R}^n$ の場合 (ユークリッド空間の場合) と混同していると思います．$\mathbf{R}$ 上で

は確かに，コーシー列は常に収束します．だから $\mathbf{R}$ は完備であると言います．$\mathbf{R}^n$ 上では確かに，コーシー列は常に収束します．だから $\mathbf{R}^n$ は完備であると言います．しかし，今は距離空間の一般論を展開しているのです．講義でも述べたし，上の質問にも出てきたように,「コーシー列が必ずしも収束しない」ような距離空間も多くあります．したがって，距離空間が完備である，ということを定義するのは意味があります．実際,「完備性」は重要な概念です．

問． コーシー列は有界ですか？

答． そうです．証明を考えてみてください．

問． どのような距離関数 d をもってきても，(X,d) が完備でないような X はあるのでしょうか？

答． ありません．ほんのつまらない例ですが，離散距離 $d(x,y)=1(x\neq y), d(x,x)=0$ を考えると，(X,d) は完備です．実際，この場合，コーシー列というのは，あるところから先は一定という点列であり，明らかに収束します．

問． $X=\mathbf{R}^n-\{0\}$ の例では，どんな距離関数をとっても完備ではないんですよね．

答． 違います．距離関数の取り方によっては完備になります．たとえば，$d(x,y)=\|x-y\|+|\frac{1}{\|x\|}-\frac{1}{\|y\|}|, (x,y\in\mathbf{R}^n-\{0\})$ と定めると，d は $\mathbf{R}^n-\{0\}$ 上の距離関数となり，$(\mathbf{R}^n-\{0\},d)$ は完備です．(この距離は，たとえると，点 $\{0\}$ が，なかなか到達できないブラックホールといった感じの距離になっています．)

問． 点列コンパクトの定義で,「A の任意の点列に対し，適切に部分列をとれば A のある点に収束する」というところの意味を教えてください．

答． 点列 $a_1,a_2,a_3,a_4,\dots,$ に対し，その一部分を無限個取り出して，改めて数列と考えたものを「部分列」と言います．$a_1,a_3,a_{145},a_{1999},\dots$ という具合です．記号は，もとの a_n の記号を使って，a_{n_k} とあらわすことが多いようです．この記号では，k が動く，$k=1,2,3,\dots,$ と動きます．そして各 k に対し，番号 n_k を選んでいく，という気持ちです.「A の任意の点列に対し，適切に部分列をとれば A のある点に収束する」というのは，言い換えると,「A の任意の点列 $\{a_n\}$ に対し，そのある部分列 $\{a_{n_k}\}$ があって，$\{a_{n_k}\}$ は極限を持ち，その極限は，A に属する」となります．

問． 完備距離空間は必ず Bolzano-Weierstrass 性を有するのですか？

答． 違います.「Bolzano-Weierstrass 性」とは,「任意の有界点列は，収束する部分列を含む」ということですね．つまり「X が完備距離空間のとき，X の任意の有界点列は，X の点に収束する部分列を含む」かどうかという質問ですね．$X=\mathbf{R}^n$ なら正しい主張ですが，一般には反例があります．講義で扱った例 $X=\ell_2=\{(x_1,x_2,\dots,)\mid x_1,x_2,\dots\in\mathbf{R},\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2<\infty\}$, $d(x,y)=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}$ では，(X,d) は完備距離空間ですが，点列 $a_n\in\ell_2$, ただし，a_n は，n 番目だけが 1 で，他は全部 0 という数列，について，a_n は有界点列ですが，収束しません．(ある $a=(x_1,x_2,\dots)$ に収束すると仮定すると，$d(a,a_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+(x_n-1)^2+\cdots$ であり，$n\to\infty$ のとき $d(a,a_n)$ が 0 に収束することは，どのような a をとってきても不可能であり，矛盾が出ます．)

問． $D=\{x\in\ell_2\mid\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2\leq 1\}$ は，ℓ_2 の有界閉集合だが，D は点列コンパクトでない，ということがわかりません．

答． 有界閉集合というのはよいですね．定義にしたがって考えればわかります．また，点列コンパクトでない，ということを示すには，具体例を挙げればよいですね．点列 $a_n\in D$, ただし，a_n は，n 番目だけが 1 で，他は全部 0 という数列，を考えると，$\{a_n\}$ のどんな部分列をとっても収束しません．($d(a_n,a_m)=1,(n\neq m)$ ということからわかります．確認してみてください．)

問． 集合が完備であることと，閉集合であることは関連していますか？

答． 質問の表現があいまいなのですが，関連があると言えます.「完備」というのは，距離空間の性質です．したがって,「距離空間が完備であることと，閉集合であることの関連」ということになりますが,「閉集合」というのは，開集合同様，どこで考えているかを明示する必要があります.「完備距離空間 X の閉集合 A は，完備か？」という質問と解釈すると,「X の距離を A に制限すれば正しい」というのが答です．

問． n 次元空間で，なぜ開集合は，点列コンパクト集合にならないのですか？

答．「開集合は，点列コンパクト集合にならない」などと言った覚えはありません．$\mathbf{R}^n$ では,「点列コンパクト $\Leftrightarrow$ 有界閉集合」というのを講義で説明しましたから,「閉集合でなければ，点列コンパクト集合にならない」というのは正しい主張です．(これはなぜか．A が閉集合でないとすると，A は A のある境界点を含みません．その境界点に収束する A の点列を選ぶことは容易にできます．その点列の部分列は，その境界点に収束しますが，A の点には収束しません．)

問． 点列コンパクトという性質と，コンパクトという性質の関係は？

答． 距離空間では,「点列コンパクト $\Leftrightarrow$ コンパクト」が成り立ちます．

問． 点列コンパクト集合の閉集合は点列コンパクトですか？コンパクト集合の直積もコンパクトで

すか？

答． そうです．証明を考えてみてください．

問． $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ がわかりません．

答． 任意の実数 $x \in \mathbf{R}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$|x-y| < \varepsilon$ となる有理数 y がある，ということが証明できます．教科書 p.15 定理 2.1 参照．したがって，任意の実数 x は，$\mathbf{Q}$ の触点です．よって，$\mathbf{R} \subset \overline{\mathbf{Q}}$ です．よって，$\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ です．

問． 無理数の集合は $\mathbf{R}$ の中で dense ですか？

答． そうです．無理数の全体を $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ と書くことにします．任意の実数 $x \in \mathbf{R}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$|x-y| < \varepsilon$ となる無理数 y がある，ということが証明できます．したがって，任意の実数 x は，$\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ の触点です．よって，$\mathbf{R} \subset \overline{\mathbf{R} - \mathbf{Q}}$ です．よって，$\overline{\mathbf{R} - \mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ なので，$\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}$ の中で dense です．

問． ★稠密 (ちゅうみつ) 性に「高い」「低い」といったことが考えられますか？

答． 難しい質問ですね．考えてみましょう．距離空間では，距離関数が大切なので，距離関数を保つ全単射 (等長変換) で移り合うものは同じとみるのが自然ですね．(X,d) を距離空間とし，$f : X \to X$ を全単射としましょう．f が**等長変換**とは，任意の $x, y \in X$ に対し，$d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ が成り立つときに言います．例：$X = \mathbf{R}^n$ ユークリッド空間とすると，平行移動や，回転は等長変換です．部分集合 $A, A' \subset X$ について,「$A \sim A' \Leftrightarrow$ 等長変換 $f : X \to X$ が存在して，$f(A) = A'$」と定義します．これは同値関係になります.「稠密である」という性質は，この同値関係で保存される性質です．つまり，A が X で稠密で，$A \sim B$ なら，B も X で稠密です．同値類 $[A], [B]$ について,「$[A] \leq [B] \Leftrightarrow$ 等長変換 $f : X \to X$ が存在して，$f(A) \subset B$」と定義すると，これは well-defined で，半順序になりますね．$[A] \leq [B]$ で，$[A]$ (の代表元) が X で稠密なら，$[B]$ も X で稠密です．たとえば，$X = \mathbf{R}$ において，$[\mathbf{Q}] < [\mathbf{R} - \mathbf{Q}]$ ですね．この順序で，稠密性の高低を判定したらよいのではないでしょうか．また，等長変換の代わりに，**同相写像**を考えても，同様な理論展開が可能でしょう．

問． 縮小写像の定義 $d(f(x), f(y)) \leq cd(x,y), c < 1$ の条件 $c < 1$ をはずしたものが,「リプシッツ条件」と呼ばれるものだと思いますが，縮小写像は，リプシッツ条件をみたすということでしょうか？

答． その通りです．縮小写像は，いわゆる「リプシッツ定数」が 1 より小さいようなリプシッツ写像です．

問． 縮小写像の定義は，$d(f(x), f(y)) < d(x,y), (x \neq y)$ ではだめですか？

答． 空間がコンパクトならよいですが，一般にはダメです．$d(f(x), f(y)) < d(x,y), (x \neq y)$ という条件と，$c < 1$ があって，$d(f(x), f(y)) \leq cd(x,y)$ というのは違います．たとえば，$X = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ にユークリッド距離を制限して，$f : X \to X$ を $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ で定義すると，$|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}| = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}}|x-y|$ であり，$\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} < 1$ だが，$\sup\left\{\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} \mid x > 0, y > 0\right\} = 1$ なので，$c < 1$ には取れません．

問． 縮小写像の原理の証明が納得いきません．

答． X のどの点から出発しても，縮小写像 $f : X \to X$ でどんどん写していくと，ある決まった点 (f には依ります) に近づいていく，実はそれが不動点だ，というのが証明のキーポイントです．

問． 縮小写像の原理で，不動点がただ１つというのはどうやって証明するのですか？

答． もし，x と x' が f の不動点とすると，$f(x) = x, f(x') = x'$ だから，$d(x,x') = d(f(x), f(x')) \leq cd(x,x')$ となります．もし，$d(x,x') \neq 0$ なら，$1 \leq c$ となり，$c < 1$ に矛盾するので，$d(x,x') = 0$ です．したがって，$x = x'$ となり不動点の一意性が導かれます．

問． 完備距離空間の集合 X が有限集合でも，縮小写像 $f : X \to X$ は不動点を持つのですか？

答． 持ちます．一般に証明できたのだから，X が有限集合であろうとなかろうと問題ではないわけです．もし，定理の条件をみたし，定理の結論をみたさないものがあれば，その定理は正しくないということになります．

問． ★コーシー列，完備性，縮小写像といった話は，位相空間上で考えることは可能なのでしょうか？

答． 一般の位相空間では無理です．というのは，これらの概念は，本質的に距離の概念を使って定義されるからです．位相空間で考えられるのは，開集合という概念で記述できるものであって，連続写像とか，コンパクトとか，連結とかといった概念です．

問． $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ の元 (x,y) に xy を対応させる写像は一様連続ですか？

答． 一様連続ではありません．一様連続の定義で，与えられた $\varepsilon > 0$ に対し，直線 $y = x$ に沿って，$\delta > 0$ が共通に取れないので．

問． ★距離空間における稠密性と，測度論における「ほとんどいたるところ」という概念は，イメージ的に似ているような気がするのですが，関連はありますか？

答． なかなかよいセンスをしていますね．$\mathbf{R}^n$ の通常のルベーグ測度を考えると関連します．$A \subset \mathbf{R}^n$ について，$\mathbf{R}^n - A$ が測度 0 ならば，$\mathbf{R}^n - A$ には (ユークリッド距離に関する) 内点がありません．したがって，A には外点がなく，$\overline{A} = \mathbf{R}^n$ となり，A は $\mathbf{R}^n$ で稠密になります．逆は言えません．$\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ は稠密だが，$\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ のルベーグ測度は 0 ではありません．(1 です)．しかし，関連はしますが，一般の測度空間のおける「ほとんどいたるところ」という概念と，一般の距離空間における「稠密性」については，**まったく世界の違う，まったく異なる概念**であると考えた方がよいと思います．

問．「ヒルベルト空間」という距離空間は，どんな所で利用するのでしょうか？

答． 多くの分野で利用されますが，関数解析，作用素論，数理物理などの分野で特に利用されます．量子力学では，ヒルベルト空間は必須です．

問．「点列」と「数列」の違いはありますか？

答． 気持ちの違いだけですが，通常，$\mathbf{R}$ や $\mathbf{C}$ の点列を数列と呼びます．

問．「連続な」距離 d をもつ距離空間 (X, d) で，任意の $x \in X$, $r \geq 0$ に対して，集合 $\{y \in X \mid d(x, y) = r\}$ が空でないとき，境界点以外の点を持つようなものにはどんなものがあるのですか？

答． 残念ながら質問の意味がはっきりしませんね．関数が「連続」ということは，考えている集合に，距離なり位相なりを考えてはじめて意味が生じます．$d : X \times X \to \mathbf{R}$ が連続であるかどうかですが，X に d から位相を入れて考えると，d はどんな場合でも連続になります．(「直積位相」の概念が必要ですが，それを勉強したら，すぐに証明できます．証明してみてください．) それはさておき，質問は，集合 $\{y \in X \mid d(x, y) = r\}$ が空でないとき，内点をもつことがあるか，ということですね．たとえば，$\mathbf{R}^3$ のなかで，原点中心で半径 r の球面と，原点の和集合を $X \subset \mathbf{R}^3$ とし，X にユークリッド距離 d を制限してできる距離空間 (X, d) を考えます．x を原点にとると，$\{y \in X \mid d(x, y) = r\}$ は，X の開集合であり，X の内点ばかりから成ります．

問． 教科書 p.79 の注で，$[0, 1]$ 上で連続であっても，$[0, 1]$ の各点で微分可能でない関数の存在を，ベールのカテゴリー定理で証明するとありますが，どういうことですか？

答． 私 (石川) も調査中です．皆さんもぜひ調べて，報告してください．教えてくれた人にはボーナス・ポイントを付けますよ．

問．「稠密な集合」と「完備な距離空間」のイメージを教えてください．

答． 私 (石川) の個人的なイメージは,「稠密な部分集合」は「ごましお」「芋をあらうような海水浴場」「初もうでの北海道神宮」で,「完備な距離空間」は「冷暖房完備」です.「ごましお」はよく混ざっていないとまずいですね．胡麻のすぐそばに塩がないとこまります.「ごまみそ」でもいいです．また，人が多くいて混んでいると，隙間がないですね．関係ないけれど,「ちゅうみつ」は「濃密なキス」だといった友人がいました．それから,「完備」のイメージについてですが,「完備でない」ということをたとえると，冷暖房完備でなくて，部屋にストーブの穴だけが開いていて，すきま風がピューピュー吹きこんで寒くて，甘美な夢から醒めてしまう，ということですか．あるいは，子牛の列が，格子戸のすきまから逃げていくって感じかな．まさか，これでわかった気になる人はいないと思います．結局，**数学は論理的につめていって理解するしかない**ようですな．

問． ★自分で例を考えるこつはありますか？例えば，完備性のところで，完備である例やそうでない例がいくつか出てきて，その事によって完備という言葉をイメージしやすくなったので，他の定義でもそれにあてはまったり，あてはまらないような例を考えてみて，確かめてみれば，より理解が深まると思うので，もしそのようなものがあれば教えてください．

答． 同感です．具体例の重要さに気付いたら，それだけで数学が 99 %わかったといってもよいくらいですね．例を見つけるコツがあれば，こちらが知りたいくらいですが，まあ，古人が見つけた例を鑑賞しながら，視野を広げていろいろ勉強して，いつも例を考えるように日頃から心掛ける，ということでしょうか．たとえば，教科書の定理があったら，その定理の仮定をみたす例と，みたさない例を見つけると，その定理の意味していることが理解できるのではないでしょうか．

問． 数学を習っていていつも感じてしまうことに,「これを知っていると，何に役立つのだろう」というのがあります．

答．「どのような応用があるか」ということを常に考えることは健全な考え方だと思います．ただし，(そんなことはないと思うけれど) 万一それを，自分に対する，勉強しない言い訳に利用すると，結局，何もやる気がしなくなる危険性が生じます．それはともかく，この講義の，そして大学でのすべての講義の究極の目的は，実は，中途半端な知識を伝授することではないんです．知識はすぐに古くなります．それよりも，**自力で考える力を皆さんにつけてもらう**ということが目的なんです.「知る」ことが目的ではなく,「知ろうと思ったら，いつでも知ることができる方法，能力」を身につけることの方が大切なわけです．方法はなかなか古くなりません.「知る能力」は皆さんの一生の役に立ちます．

回答者から． 最近，皆さんの質問の程度が少しだけあがってきたような気がします．気のせいかも知れませんが，喜ばしいかぎりです．(同時に，質問に答えるのが大変になってきたとも言えますが．) この調子で，素直な質問，ユニークな質問をドンドンぶつけてください．では，今後ともよろしくね．