数学序論１１質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 5 (１９９９年１１月１７日) の分

問． 講義でやった例で，$U_n = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1+\frac{1}{n}\}$ のとき，$\cap_{n=1}^{\infty} U_n = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ となるところがわかりません．なんとなく，$\cap_{n=1}^{\infty} U_n = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})\}$ となると思うので．

答． いくつか似たような質問がありました．これらを読んでいて，皆さんが**数学がわからなくなる原因の１つ**に気がつきました．**知らないうちに不合理な推論を混入させてしまう**ということではないかな．不合理な推論の例として,「$a_n < b_n$ で，$a = \lim_{n\to\infty} a_n, b = \lim_{n\to\infty} b_n$ ならば，$a < b$」というのがありますね．この推論が正しくないということは，１年生のとき必ず習うと思います．習ったけれど忘れているのかな．丁度風邪をひいて欠席したかな．でも教科書を読んでいればわかるよね．教科書を読んでいないかな．でも，ちょっとした具体例を想像するだけですぐわかると思うけどね．真剣に考えたことがないのかな．わからないのが不思議だな．それはともかく，たとえば，$a_n = 1, b_n = 1+\frac{1}{n}$ について考えると，$1 < 1+\frac{1}{n}$ ですね．え，これがわからない．うむ，$1 < 1+\frac{1}{1}, 1 < 1+\frac{1}{2}, \ldots, 1 < 1+\frac{1}{1999}, \ldots$ ですよね．さて，$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})$ は何でしょう．これが 1 になるのは良いですか？$1+\frac{1}{n}$ は，いくら n を大きくしても 1 にはならないじゃないか，と言うかも知れませんが，それは極限のことをまったく認識していない発言ですね．lim は極限の意味ですよ．すると，上の「不合理な推論」によれば，$1 < 1$ となりますね．まさに不合理ですね．さて，質問の内容に戻ると，任意の $n = 1, 2, \ldots$ について，$(1,0) \in U_n$ ですね．したがって，$(1,0) \in \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ ですね．ああ，そうか．**数学がわからなくなる２つめの原因**に気がつきました．**定義を自分勝手に解釈する**ということです．U_n は，半径がどんどん小さくなる円盤で，$\cap_{n=1}^{\infty} U_n$ はそれの極限みたいなもので，$n \to \infty$ だから，円盤が津波のように押し寄せてきて恐いので，点 $(1,0)$ も避難して，消えてなくなるから，$(1,0) \notin \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ になると，なんとなくそう思うのかな．かなり不合理な推論が混入していますね．混入というより，不合理な推論のかたまりですね．何はともあれ，定義にもどり，$\cap_{n=1}^{\infty} U_n = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid$ 任意の $n = 1, 2, \ldots,$ について $x \in U_n\}$ です．任意の $n = 1, 2, \ldots$ について，$(1,0) \in U_n$ なので，共通部分の定義から，$(1,0) \in \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ となるわけです．以上，質問にある推論は，不合理な推論であり，その不合理な推論にもとづいて理解が阻害されているということが判明しました．不合理な推論を混入するのは，たとえると，塩の壷に砂糖を放り込むようなものです．料理人としては失格ですね．数学を永年やっていて，どうも変だ，何かおかしい，ということが，実は私 (石川) にも時々あります．そのうちの数回は，変なこだわりがあって，馬鹿げた推論をしていることに自分では気が付かない，という場合でした．それで，何ヶ月も (何年も？) 無駄にして，ああ，なんて俺は馬鹿なんだ，と落胆します．でも次の日には，懲りずにまた新しいことを考え始めますが．それはともかく，$\cap_{n=1}^{\infty} U_n = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ を合理的な推論によって証明するにはどうしたらよいでしょうか．わからなければ**定義に戻ってコツコツと**，というのがコツです．任意の $n = 1, 2, \ldots$ について，$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\} \subset U_n$ なので，$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\} \subset \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ ですね．反対向きの包含関係を示すには，左辺に属さない点は，右辺にも属さない，ということを示せばよいですね．そこで，$(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ が $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ に属していないとすると，$x_0^2+y_0^2 > 1$ であるから，n を十分大きくとると，$x_0^2+y_0^2 > 1+\frac{1}{n}$ となりますね．(十分大きく，というのがわからない人には，$n > 1/(x_0^2+y_0^2-1)$ と取れと答えましょう．) ですから，そのような n については，$(x_0, y_0) \notin U_n$ となるので，$(x_0, y_0) \in \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ ではなく，$(x_0, y_0) \notin \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ となることがわかります．したがって，$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\} \supset \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ です．よって，$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\} = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ です．

問． $F_n = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \geq 1+\frac{1}{n}\}$ が閉集合なのは何故ですか？イメージ的には，F_n は外側に無限に広がっているので閉集合という感じがいまいちしません．

答． 不合理な推論を混入させていますね.「閉集合は外側に無限に広がらない」という根拠のない推論に惑わされているわけです．閉集合の定義にのっとって考えましょう．

問． ★距離空間 X の部分集合 $A \subset X$ が与えられたとき，X の点を内点，外点，境界点と分類し，それを使って閉包を定義し，それで閉集合が定義できることはわかりましたが，授業で使ったのは，開集合の定義と，閉集合の補集合が開集合ということしか使っていないので，このことだけで議論できないのでしょうか？

答． 議論できます．位相空間の一般論で言いたいことは，結局そういうことです．しかし，内点，外点，境界点といった概念を導入することは，議論をわかりやすくするために有効と考えられます．教育的配慮です．

問． 開集合，閉集合という言葉は，よく定理の前提に用いられていますが，それほど重要なもので，他の性質のものでは代用は不可なのですか？

答． 重要なものです．無理すれば代用できなくもないでしょうが，記述が非常に煩雑になると予想されます．開集合，閉集合という概念は，非常に洗練・精錬されたものであり，数学の基本的構成要素 (素粒子みたいなもの？クォークみたいなもの？) と考えられます．

問．「無限個の開集合の共通部分は開集合とは限らない」とありますが，開集合になる場合はあるのですか？

答． もちろんあります．(無限個の異なる開集合で，ということですよね．異ならなくてよいなら，質問がすごく簡単になってしまうので．) $\mathbf{R}^2$ で，最初の質問にも出てきた U_n の他に，$U_0 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < \frac{1}{2}\}$ とおけば，$\cup_{n=0}^{\infty} U_n = U_0$ となり $\mathbf{R}^2$ の開集合です．

問．「$U_\lambda(\lambda \in \Lambda)$: X の開集合 $\Rightarrow \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は X の開集合」をどのような方針で証明するのか，まったく考えられません．

答． **わからなくなったら定義に戻れ**，が基本です．まず，示すべき結論を，定義 (この場合，開集合の定義) に基づいて書き直します．書き直しましたか？それができたら，前提もすべて定義に基づいて書き直します．書き直しましたか？そして，その書き直した前提と，書き直した結論を，論理的に結ぶつけていけば良いだけです．やってみてください．

問． 開集合の集合の濃度は可算ですか？

答． 通常は可算ではありません．たとえば，$X = \mathbf{R}$ のとき，任意の $\varepsilon > 0$ について，$(-\varepsilon, \varepsilon)$ は開集合ですが，非可算無限 (連続濃度) ありますね．

問． 開集合系の性質の (2) を，「$U_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ が X の開集合 $\Rightarrow \cap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は X の開集合」と書いてはいけないのですか？

答． 前提のところで，「Λ が有限集合で」と付け足せばよいです．付け足さなければダメです．

問． 教科書の記号で，$\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_d(X)$ のとき，$\cup\mathcal{U}$ は X の元なのですか，部分集合なのですか，部分集合系なのですか？

答． $\cup\mathcal{U} := \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{U}, x \in U\}$ なので，X の部分集合です．

問． ★ $\mathbf{R}^n$ の開区間 $(a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n)$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合になりますか？これはどのように証明すればよいのですか？

答． $\mathbf{R}^n$ の開集合です．任意に，$c = (c_1,\ldots,c_n) \in (a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n)$ をとります．$a_i < c_i < b_i, (1 \le i \le n)$ なので，$\varepsilon = \max\{c_1 - a_1, b_1 - c_1, \ldots, c_n - a_n, b_n - c_n\}$ とおくと，$\varepsilon > 0$ です．すると，ユークリッド距離に関して，$N(c;\varepsilon) \subset (a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n)$ となることが容易に示せます．(各自考えてみてください．) したがって，開集合の定義から，$(a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n)$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合であることが結論されます．

問． 距離空間 X について，$\mathrm{Int}X = X = \overline{X}$，$\mathrm{Int}\emptyset = \emptyset = \overline{\emptyset}$ は成り立ちますか？

答． 成り立ちます．(各自考えてみてください．)

問． 教科書 p.7 に「空集合は，どのような集合についても，その部分集合であると定める」という文を見つけました．ということは，$\emptyset \in \mathcal{O}_d(X)$ や $\emptyset \in \mathcal{A}_d(X)$ は自明ではないのでしょうか？

答． 自明ではありません．基本的なことですが，$\subset$ と $\in$ は意味が違います．「どのような集合 S についても $\emptyset \subset S$ が成り立つ」 は正しい命題ですが，「どのような集合 S についても $\emptyset \in S$ が成り立つ」は正しくない命題です．

問．「$\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である」という意味がわかりません．$\overline{A}$ は閉集合ですが，それ以外の閉集合はあるのですか？

答． 具体例で説明しましょう．いつも，$X = \mathbf{R}$ や $X = \mathbf{R}^2$ の例を挙げているので，気分を変えて，$X = \mathbf{R}^3$ でいきましょう．$A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1\}$ について考えると，$A \subset \overline{A} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ です．しかし，A を含む $\mathbf{R}^3$ の閉集合は他にもありますね．たとえば，$B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 2\}$ について考えると，B は $\mathbf{R}^3$ の閉集合であり $A \subset B$ ですね．そして，$\overline{A} \subset B$ です．このように，「$\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である」というのは，「$A \subset B$ であるような X の任意の閉集合 B について，$\overline{A} \subset B$ が成り立つ」という意味です．**数学がわかるようになる秘訣**に気が付きました．「具体例を考えよ」

問．「$\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である」「$\mathrm{Int}A$ は A に含まれる最大の開集合である」という場合の，大小とは何ですか？

答． 集合の包含関係に関する順序についての大小です．

問． $\mathrm{Int}A = (\overline{X - A})^c, \overline{A} = (\mathrm{Int}(X - A))^c$ は一般に成り立ちますか？

答． 成り立ちます．証明を考えてみて下さい．

問． 閉集合系の性質を位相の公理とすることができるのですか？

答． できます．よい指摘ですね．

問． 孤立点を考える意味はありますか？

答． あります．具体例でいうと，$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x^2 + y^2)(x - 1) = 0\}$ は ユークリッド平面 $\mathbf{R}^2$ の中で，孤立点 $(0, 0)$ を持ちます．特異点論では，特異点集合の孤立点，すなわち孤立特異点は重要な研究対象です．モジュライ空間の孤立点は，リジディティーを持つ対象で，幾何学の重要な研究対象です．制御理論で，パス (経路) の空間の孤立点は，特別な意味を持つ経路であり，重要な研究対象です．

問． 距離空間 $(\mathbf{Z}, d), d(x, y) = |x - y|$ で，$A = \{(x, y) \mid x, y \in 2\mathbf{Z}\}$ の閉包は $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z}\}$ でよいのでしょうか？

答． 全然だめです．質問にある距離空間 $\mathbf{Z}$ は離散空間，すなわち，すべての部分集合は開集合であり，かつ，閉集合です．したがって，A は閉集合であり，$\overline{A} = A$ なので，全然だめです．

問． ★教科書 p.68 の実連続関数環は，実ベクトル空間であると思いますが，どうでしょうか？その場合，次元はどうなりますか？

答． 実ベクトル空間になります．通常 (詳しく言えば，定義域の X が有限集合でなければ)，無限次元です．

問． 距離と長さは関係ないものなのですか？たまたまユークリッド空間では関係していたということですか？

答． 関係があります．もちろん，距離と言う場合，単に距離関数の公理を満たしさえすればよく，突飛な距離関数を持ち出せるので，どんな距離に関しても長さと関係があるとは言えないわけですが，ユークリッド距離以外にも，長さと関係するような重要な距離があります．とくに重要と考えられる例として，リーマン幾何と，バナッハ空間論を挙げておきましょう．リーマン幾何では，リーマン多様体の距離を考える場合，２点を結ぶ最短経路 (最短測地線) の長さで定義します．また，バナッハ空間では，ベクトルの長さ (ノルム) が定義されているわけですが，そこでは距離が，ノルムを使って，$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ で定義できます．

問． ノルムと距離関数の違いは何ですか？

答． ノルムを使って距離が定義できる，という関係にあります．

問． ★ $\mathbf{R}^2$ の開集合，閉集合という場合は，すべてユークリッドの距離関数 $d^{(2)}$ で考えている気がするのですが．

答． その通りです．とくに断わらなければ，$\mathbf{R}^n$ の距離は，ユークリッドの距離を考えます．

問． 「$\mathrm{Int}A$ は X の開集合」の証明のところで出てきた $N(x'; \varepsilon - d(x, x'))$ がわかりません．

答． $N(a; \varepsilon) = \{x \in X \mid d(a, x) < \varepsilon\}$ ですね．ですから，定義どおり，$N(x'; \varepsilon - d(x, x')) = \{x'' \in X \mid d(x', x'') < \varepsilon - d(x, x')\}$ です．(a を x' と読み替え，ε を $\varepsilon - d(x, x')$ で読み替えればよいのです．) とにかく道に迷ったら，へたに動かないで，出発点に戻りましょう．いつでも出発点にもどる勇気が，数学では (他のことでも？) 大切です．

問． 「$\mathrm{Int}A$ は X の開集合」の証明のところで，「$\forall x \in \mathrm{Int}A$, x は fix」という説明が欠けているのではないでしょうか？

答． 気持ちはわかりますが論理的には問題ないのです．$\forall x \in \mathrm{Int}A, \cdots$ は，$\mathrm{Int}A$ から任意の x をとり,... ということであり，一度取ったら，１つに決まるわけですから，いちいち固定すると言わなければならない論理的必然性はないわけです．でもわかりやすさ (教育的配慮) の点から言えば，たしかに，x は fix と確認した方がよいですね．

問． 「$\mathrm{Int}A$ は X の開集合」の証明ですが，もっと簡単に,「定義より，$\mathrm{Int}A$ は開集合である．$\forall x \in \mathrm{Int}A$ を考える．$\mathrm{Int}A \subset A$ より，$x \in A$. $A \subset X$ より，$x \in X$」ではダメですか？

答． 全然ダメです．まず,「定義より，$\mathrm{Int}A$ は開集合である」の部分が唐突です．開集合という場合，何の開集合か明示しないと意味がない，と口を酸っぱく言っているはずです．したがって，この部分は無意味です．後半は，結局，$\mathrm{Int}A \subset X$ という自明なことを言っているに過ぎず，何も示していないと

いうことになります.

問. 「触点」がよくイメージできません. イメージを助けるヒントをください. (No.4 から再掲)

答. 前回, 属してはいないけれど「さわっている」ということです, と回答しましたが, 正確には, 属してはいない**かもしれない**けれど「さわっている」ということです, と答えるべきでした. 訂正します.

問. いたるところ微分不可能な連続関数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は存在しますか？(No.4 から再掲)

答. 講義とあまり関係しない質問ですが, と書きましたが, 教科書を良く見ると, p. 79 の注に関連する記述がありました. したがって, 講義と十分関連する質問でした. 失礼しました. 訂正します.

問. 微分可能関数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ で, 導関数が連続でないもの, つまり C^1 級でないような具体例はありますか？

答. あります. 有名な例は, $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x},(x\neq 0),f(0)=0$ で定まる関数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ です. $x\neq 0$ のとき, $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ であり, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=h\sin\frac{1}{h}\to 0,(h\to 0)$ であるから, $f'(0)=0$ となり, f は微分可能です. しかし, $f'(x)$ は $x=0$ で連続ではありません.

問. ★距離空間 $(C[a,b],d)$ ただし, $d(f,g)=\inf_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ について, $C^1[a,b]=\{f\mid f:[a,b]\to\mathbf{R}$ は C^1 級 $\}$ は $C[a,b]$ の閉集合ですか？

答. 閉集合ではありません. $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ を $f(x)=\dfrac{2}{b-a}(x-a),(a\leq x\leq\dfrac{b+a}{2}),f(x)=\dfrac{2}{a-b}(x-b),(\dfrac{b+a}{2}\leq x\leq b)$ で定めると, $f\in C[a,b]-C^1[a,b]$ です. 具体的な式は与えませんが, 任意の $\varepsilon>0$ について, f の $C[a,b]$ における, d に関する ε-近傍 $N(f;\varepsilon)$ の中に, C^1 級関数が属します. したがって, $C[a,b]-C^1[a,b]$ は $C[a,b]$ の開集合ではありません. よって, $C^1[a,b]$ は $C[a,b]$ の閉集合ではありません.

問. ★距離空間 (X,d_X) と, 全射 $f:X\to Y$ について, $d_Y(y_1,y_2)=d_X(f^{-1}(y_1),g^{-1}(y_2))$ と定義すると, d_Y は Y 上の距離関数になりますか？また, このとき, $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ は連続になりますか？

答. 基本的には良いアイディアと思います. ただし, 定義にあいまいなところがあります. また, その部分を好意的に解釈したとしても, 一般には距離関数にはなりません. まず, $f^{-1}(y_1)=\{x\in X\mid f(x)=y_1\}$ のことですね. (正確には, $f^{-1}(\{y_1\})$ と書くべきところですが, これは良いとしましょう.) したがって, $f^{-1}(y_1)$ は X の部分集合ですね. すると, $f^{-1}(y_1)$ と $f^{-1}(y_2)$ の距離は何か, ということに明らかにしなければなりません. 質問のままでは, 意味不明なので, $d_Y(y_1,y_2):=\inf\{d_X(x_1,x_2)\mid x_1\in f^{-1}(y_1),x_2\in f^{-1}(y_2)\}$ とおけばどうでしょう. その際, まず問題なのは, $y_1\neq y_2$ にもかかわらず, 右辺が 0 になってしまうことはないか, ということですね. 実際そういう場合もあるので, f を**プロパー**としましょう. (f がプロパー $\Leftrightarrow$ Y の任意の**コンパクト**集合の逆像がコンパクト). すると, $y_1\neq y_2\Rightarrow d_Y(y_1,y_2)>0$ が成立します. 他の距離関数の条件も成り立つことがわかるので, d_Y は距離関数になります. また, $d_X(x_1,x_2)\geq d_Y(f(x_1),f(x_2))$ が成り立つので, f は連続になります. これも良い演習問題ですが, 少し難易度が高いので, 大学院の資格試験レベルですね.

問. ある言葉の定義を, 事実を歪めない範囲内で, 自分の思うままに言い換えたり作り出したりしてもよいのですか？

答. まったくその通りです. ただし, 事実を歪めない範囲内でです. というより, 定義するのは簡単ですが, 整合性に注意することが大切ということです.「整合性」つまり「矛盾を含まない」ということは, 数学の理論について, まず満たすべき最低限の条件です.