数学序論１１質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. ４ (１９９９年１１月１０日) の分

問．１つの集合に対して，距離関数が２つ以上存在することはあるのですか？

答．あります．たとえば，$X = \mathbf{R}$ 上の距離で言うと，$d(x, y) = |x - y|$ があり，$d(x, y) = 2|x - y|$ があり，$d(x, y) = 3|x - y|$ があり，$d(x, y) = 4|x - y|$ があり，$d(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ があり，また，$d(x, y) = 1 (x \neq y), d(x, x) = 0$ があります．距離の満たすべき条件をすべて満たしているので，どれも $\mathbf{R}$ 上の距離です．何を調べたいか，という目的に応じて，距離を設定し，距離空間の一般論を個々のケースに応用するわけです．

問．同じ集合でも，距離が違えば，違う距離空間なのですか？

答．まったくその通りです．札幌の街の中心部は碁盤の目になっていますね．大通り西１２丁目から南９条西４丁目に歩いて行くときの「距離」を考えましょう．ビルの中を斜めに進んだり，ほかの家の茶の間を通ったりしないで，道路に沿って歩いて行くとすると，通常のユークリッドの距離より長くなりますね．現実は，街の区画は均一ではないけれど，$X = \mathbf{R}^2$ 上に距離関数 $d((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|$ を考えると良いモデルになりますね．もし途中の道が工事中なら，迂回しなければいけないから，もう少し複雑な距離関数になるし，ススキノの客引きにつかまって目的地になかなか到達できないかもしれない場合は，また違った距離関数を設定した方が良いかもしれないですね．このように，同じ札幌市でも，距離関数が違えば異空間になります．

問．同じ数列でも，距離のとりかたによっては，収束するかしないか変化するのですか？

答．そのとおりです．変わります．たとえば，通常の距離に関しては，数列 $\{\frac{1}{n}\}$ はもちろん収束しますが， 離散距離 $d(x, y) = 1 (x \neq y), d(x, x) = 0$ については，収束しません．収束しないということは，定義にあてはめればすぐにわかります．(離散距離は，互いに距離をおく，個人主義の世界といったところでしょうか．)

問．「どんな距離空間でも成り立つ」というのはどういう意味ですか？「どんな距離空間でも」という言葉がよく理解できないし，イメージが浮かびません．距離空間というのは，いろいろな種類が存在していて，区別できるものなのですか？

答．距離空間はたくさんあります．講義では $\mathbf{R}^n$ の通常の距離や，閉区間上の連続関数の全体の集合に，積分を使って定義した距離を紹介しましたが，それだけでも無限個の距離空間の例を挙げたことになりますね．そのような「すべての距離空間において成り立つ」ということです．たとえると,「どんな人間にも人権がある」ということはわかりますか？すべての人間に面識がなくても理解できますね．(賛同するかどうかはともかく，理解できるかどうかということです．) 地球上のすべての人と知り合いになるのはとても無理な相談です．知っているのは身近な人に限られますね．多くても１００人か２００人ぐらいですかね．それでも想像力で抽象化して,「どんな人間にも人権がある」ということは普通に理解できるわけです．それと同じことです．

問．$\mathbf{R}^n$ のユークリッドの距離以外の距離関数は，他の学問でどのように役に立つのですか？位相などの幾何学でしか使わない考え方なのでしょうか？

答．いろいろな分野で役に立ちます．解析学でも代数学でも幾何学でも制御理論でも文化人類学でも役にたちます．たとえば，バナッハ空間やヒルベルト空間は距離空間です．代数関数論や数論で登場する「付値論」でも距離の概念は必須です．測地学で，たとえば，地球上の２点間の距離 (表面に沿った最短経路の長さ) は，ユークリッドの距離と異なります．ユークリッド空間内でも，障害物がある場合，それを迂回するという拘束条件のもとでの最短経路を調べる際には，通常の距離と異なる距離を考える必要が生じます．また，ある部族の近親関係を距離空間の理論で説明した仕事もあります．ここで挙げた事項は私 (石川) が知っていることの，しかもほんの一部ですが，このように距離という考え方は広く役にたちます．数学は総合科学であり，抽象的であるおかげで，普遍的なので，どのような分野についても潜在的に応用可能なのです．

問．距離の定義の (2) $d(x, y) = d(y, x)$ は明白ではないのでしょうか？

答．定義なので，明白であるとか，明白でないとかいうことはナンセンスです．ユークリッドの距離では明白な性質であるが，重要な性質を,「距離」の満たすべき条件の１つとして採用したわけです．したがって，与えれた関数 $d : X \times X \to \mathbf{R}$ を距離とよび，いま講義で説明している距離空間の一般論を適用しようと思ったら，条件のすべてをチェックしなければなりません．たとえば，$X = \{a.b\}$ を２点からなる集合とし，関数 $d : X \times X \to \mathbf{R}$ を $d(a, a) = 0, d(a, b) = 1, d(b, a) = \frac{1}{2}, d(b, b) = 0$ で定めると，この d は距離の条件 (1), (3) をみたすが，条件 (2) は成り立たないので，距離とは言いません．

問．$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ と定めると $C[a, b] = \{f \mid f : [a, b] \to \mathbf{R}\ 連続関数\ \}$ の距離になると

のことですが，これは面積であり，距離ではないのでは？

答． 距離です．$\mathbf{R}^2$ での面積に基づいて定義された $C[a,b]$ 上の距離関数です．基本的なことですが，**関数１つ１つを「点」とみなしている**ことに注目しなければ，話を理解できないでしょう．ここでは，関数の集合の考えて，その２点間の距離，つまり２つの関数の間の距離，つまり，距離関数の条件をみたすような関数 $d : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbf{R}$ を定めたわけです．

問． $C[a,b] = \{f \mid f : [a,b] \to \mathbf{R}$ 連続関数 $\}$ について，$f \in C[a,b]$ の ε-近傍が視覚的に想像しにくいのですが．

答． まず**論理的に納得する**ことから始めて，使っているうちに慣れて，何とも感じない，空気みたいなものに思えるようになるのが理想です．空気を視覚的に想像するのはむずかしいですよね．はじめから視覚的に想像しなければ何も問題ないわけです．

問． $\mathbf{R}^n$ の有限個の点からなる部分集合は，開集合，閉集合のどちらになりますか？

答． 閉集合です．そのことを示すには，補集合が開集合であることを示せばよいですが，そのことは，補集合の各点に対し，その点と，初めの有限個のそれぞれの点との距離の最小値を ε とおけば，その点の ε-近傍が補集合に含まれる，ということから証明できます．この証明の概略を数学的にきっちりした証明に書き直してみてはいかがでしょう？

問． 距離空間 $(\mathbf{R}, d)$ において，$\mathbf{Q}$ の境界点があるとしたら，どのようなものですか？もしかして境界点はないのではないかと思うのですが．

答． d は通常の距離ですよね．その場合，任意の $x \in \mathbf{R}$ は，$\mathbf{Q}$ の内点ではなく，$\mathbf{Q}$ の外点でもなく，$\mathbf{Q}$ の境界点です．つまり，すべての点が境界点です．**定義に基づいて考えれば，すぐにわかります**．

問． 今日やったことは，絶対値を使って書いたことを，ただ "d" を使って表し直したのと何も変わらない気がします．距離空間と今まで考えていた空間の違いがわかりません．

答． 質問の意味がはっきりしません．いままで講義で扱っていた，たとえば $X = \mathbf{R}$ と，一般の距離空間が同じか違うかということであれば，もちろん違います．講義で扱った例で考えても，$\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}^2$ は違うし，閉区間上の連続関数の全体の集合と $\mathbf{R}$ は違います．それが区別できないというのは，何か根本的な誤解があるように感じました．

問． $\emptyset$ と X の他に開集合かつ閉集合である部分集合があるような距離空間 X は，かなり特殊なのではないですか？

答．「特殊」の意味がはっきりしませんが，ともかく，そのような空間は,「連結でない空間」ということなので，いくらでもあります．たとえば，$X = (0,1) \cup (2,3) \subset \mathbf{R}$ に，$\mathbf{R}$ 上の距離と同様に距離を定義できて，X は距離空間ですが，$(0,1) \subset X$ は，X の開かつ閉集合です．

問． 開集合に境界点はないのですか？

答． **境界点はあっても，そこには属していない**ということです．たとえば，$X = \mathbf{R}^2$ にユークリッドの距離を考え，$U = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ とおくと，U は $\mathbf{R}^2$ の開集合ですが，U の境界点の集合は，$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ です．ちゃんとありますね．ただし，その境界点が U に属することはないわけですね．部分集合について，その部分集合に関するどの境界点もそこに属さない，ということが，開集合である必要十分条件です．

問． 開集合の点列の極限はどうなるのですか？

答． その開集合の点であるとは限りません．境界点になることがあります．たとえば，$U = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 上の点列 $a_n = (1 - \frac{1}{n}, 0)$ の極限 $(1,0)$ は U に属さない U の境界点です．

問． $X = \mathbf{R}^n$ で，$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ とおくと距離になる証明で，３角不等式がわかりません．

答． 教科書 p.49 を見て下さい．

問． ★「$x \in X$ が A の集積点 $\Leftrightarrow$ x は $A - \{x\}$ の境界点」ということがよくわかりません．定義にあてはめると，x は $A - \{x\}$ の境界点 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon; N(x;\varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$ かつ $N(x;\varepsilon) \cap (X - (A - \{x\})) \neq \emptyset$ となるところまではわかるのですが，あとの条件が成り立つことがわかりません．

答． もう一歩というところですね．$x \in X - (A - \{x\})$ であり，$x \in N(x;\varepsilon)$ なので，$x \in N(x;\varepsilon) \cap (X - (A - \{x\}))$ だから，これは空集合ではないわけです．

問．「孤立点」のイメージがわきません．孤立点は，内点，外点，境界点のうちどれにあたるのですか？

答． 具体例で説明すると，$X = \mathbf{R}$ で，$A = (0,1) \cup \{2\}$ とすると，$2 \in \mathbf{R}$ は A の孤立点です．わかりますか？定義にあてはめて確認してください．$B = \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \ldots\}$ について，考えると，B のすべての点 $\frac{1}{n}$ は孤立点です．わかりますか？定義にあてはめて確認してください．この場合，孤立点は，すべて境界点です．定義にあてはめて確認してください．なお，通常，孤立点は，境界点ですが，X 自体

が孤立点を持つ場合，たとえば，$X = (0,1) \cup \{2\}$ の場合は，孤立点 $2 \in X$ は，X の内点になります．すべては定義にあてはめて確認できます．でも，紛らわしいので，これも要注意事項ですね．

問． 集積点というものが上手くイメージできません．

答． 上の例で，0 は B の集積点です．

問．「触点」がよくイメージできません．イメージを助けるヒントをください．

答． 属してはいないけれど「さわっている」ということです．多くの具体例にあたってみてはいかがでしょう？

問． 距離空間 X で，$A = X$ のとき，A の外点や境界点はどうなるのですか？また，$A = \emptyset$ についてはどうですか？

答．定義にあてはめれば，すぐにわかるように，X の外点なし，X の境界点なし，です．X の点はすべて X の内点です．**定義にあてはめればわかります**．また，$\emptyset$ の内点はない，境界点もない，X の点はすべて $\emptyset$ の内点です．**定義にあてはめればわかります**．

問． 教科書の問 8.1 の (3) が良くわかりません．

答． $C = \{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \mid n, m$ は自然数 $\}$ です．まずは，C を図示してゆっくり考えてみてください．

問． この講義では ε-近傍を $N(a;\varepsilon)$ と書いていますが，序論 2 では $U(a;\varepsilon)$ という記号を使っています．どちらを使ってもかまわないのでしょうか？U はユークリッドのスペルから来ていると想像していたのですが，どうも違うようですね．

答． どちらを使ってもかまいません．単に記号の問題です．ただし，それは何か，と尋ねられたら，すぐに説明できるようにしておいてください．説明例:「これは，点 a の ε-近傍であり，$\{x \in X \mid d(x,a) < \varepsilon\}$ が定義です」．ちなみに，ユークリッドの頭文字は E ですね．U ではありません．開集合を U で表す場合が多いので，U を使ったと推測されます．また，N は近傍 (neighborhood) の頭文字です．

問． 濃度の比較のところで，A と B の間に全単射が存在するとき，A と B の濃度が等しい，と定義され，その後，ベルンシュタインの定理で,「A から B への単射と，B から A への単射があれば，A と B の濃度が等しい」ということを学びましたが，これは濃度の比較の仕方がいくつもあるということですか？

答． 定義はひとつです.「A から B への単射と，B から A への単射がある」ということから，その単射の存在を仮定して，全単射を新たに構成できる，ということが，ベルンシュタインの定理の証明であり，したがって，定義にあてはめて，濃度が等しいと言っているわけで，**首尾一貫しています**．

問． 濃度の集合にはどんな性質があるのでしょうか？

答．「濃度の集合」というのが適切な表現かどうかは別として答えます．濃度の足し算，掛け算，冪は，対応する集合の和集合，直積，冪の濃度として定義できます．したがって，通常の数の性質の一部を持ちます．でも，割算などはうまく定義できません．

問． $\mathbf{R}^n$ はどういった空間をイメージするとよいのでしょうか？$\mathbf{R}^4$ 以上はピンときません．$\mathbf{R}^4$ 以降は抽象的な部類に入ってしまうのですか？

答． 抽象的というなら，$\mathbf{R}$ も抽象的です．$\mathbf{R}^2$ も抽象的です．R^3 も抽象的です．それはともかく，3 次元空間までは，われわれは容易に想像できるのに，4 次元は想像しずらいのはなぜでしょうね．われわれが，なぜ 3 次元を想像できるか，それは進化の経過で身に付けた能力であると考えることができるのではないでしょうか．つまり，物の奥行き，遠近感，といったものを想像する能力は，生き延びるために必要不可欠であった，ということは容易に想像できますね．ライオンが遠くにいるのか，ヒグマが近くにいるのか，を認識するのは，生死にかかわります．それに比べて，4 次元を想像する能力は，さほど必要なかったわけです．(もし生き延びるために 4 次元が必要だったら，生き延びてきたわれわれは，4 次元を容易に想像するでしょうね．) というわけで，われわれは，4 次元を想像する能力を持ち合わせていないと考えるのが適当でしょう．ところで，われわれは,「時間」というものを想像する能力も持ち合わせています．時間という概念が，どのぐらい生き延びるために切実だったか，ということはわかりませんが，想像するに，朝日がのぼり，夕日がしずみ，人が生まれ死んでいく，ということから自然発生的に生まれた概念でしょう．それはともかく，4 次元をいうものを説明するのに，われわれが想像するのに得意な 3 次元に，これまた馴染みのある時間がたまたま 1 次元だから，それを加えて，(無理して?) 4 次元を想像しようとするのは，至極当然といえます.「動画」，つまり，多くの 2 次元的な図の積み重ねで，3 次元的な物の推移を想像させ，そして，それで 4 次元を理解しようという試みはあります．実際，現代数学では，そのような手法が使われます．ただし，ここで，注意してほしいのは，$\mathbf{R}^n$ は，単に「複数の数値的データの組の空間」であり，無色透明，なんでもござれ，という普遍性があるということです．言い換えれば，たて，よこ，高さ，時間，といった変数に固執することなく，他のどんな状況でも応用できる話なのです．**抽象的だからこそ応用範囲が広い**のです．論理規則を守り，計算

規則にのっとり，定義に従い，理論の前提をチェックしておきさえすれば，論理的に結論が出せる，ということです．これが近代科学の強みです．どうイメージしようが，正しいことは正しいわけです．このことにもぜひ注目してください．

問． $d(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$ と定めたとき，$d(f,g)=0$ から，$f=g$ ということが，連続性から導かれるとのことですが，よくわかりません．

答． これは微積分の問題ですが，答えましょう．背理法で証明します．つまり，ある x_0 で $f(x_0)\neq g(x_0)$ と仮定して矛盾を導きます．仮定から $|f(x_0)-g(x_0)|(=c)>0$ ですが，関数 $|f(x)-g(x)|$ は大前提から連続なので，ある $\delta>0$ があって，$|x-x_0|<\delta$ ならば $||f(x)-g(x)|-|f(x_0)-g(x_0)||<\frac{c}{2}$ となります．したがって，そこで，$||f(x)-g(x)|>\frac{c}{2}$ となるので，$y=|f(x)-g(x)|$ と x 軸で挟まれた領域に，少なく見積もっても面積 $\frac{c\delta}{2}$ の長方形が含まれますね．したがって，背理法モードで，積分が >0 となり，矛盾が生じます．したがって，すべての x について，$f(x)=g(x)$ となり，$f=g\in C[a,b]$ となるわけです．

問． いたるところ微分不可能な連続関数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は存在しますか？

答． 講義とあまり関係しない質問ですが，答えると，そういうものは存在します．ただし，具体例を作るのは意外に難しく，古典的な例では，ワイヤシュトラスの関数や高木の関数が有名です．高木の関数は,「解析概論」で有名なあの高木貞治先生が作ったものです．それで思い出したのですが，私 (石川) は学生時代，高木先生の全集を図書館で眺めて，その中の，非常に短い論文を見つけ，短くて簡単そうなので，読んでノートに訳した記憶があります．その論文が，現在，高木の関数と呼ばれている，いたるところ微分不可能な連続関数を構成した論文でした．ただし，その論文を読んだ，という記憶はあるのですが，肝心の論文の中身の記憶はなったく欠落していて，ノートも見つかりませんでした．残念です．まあ，このような関数は，最近たとえば「フラクタル理論」というものの研究対象になるので，フラクタル理論関係の本に詳しく載っていると思いますから，それを参照してはいかがでしょう．

問． 距離空間で，常に $d(x,z)=d(x,y)+d(y,z)$ (３角不等式を等号にしたもの) が成り立つものがもしあれば教えてください．(再掲)

答． No.3 の回答で,「そんな距離空間はない」と回答しましたが,「ただ１点だけからなる距離空間に限る」と訂正します．つまり，もしそのような距離空間があったとすると，２点 x,y に対し，$0=d(x,x)=d(x,y)+d(y,x)=d(x,y)+d(x,y)=2d(x,y)$ から，$d(x,y)=0$ となり，$x=y$ となるので，ただ１点だけからなる距離空間に限るわけです．(同僚の M 先生から指摘されました．感謝します．)

問． ★「非ユークリッド空間」とは，ユークリッド空間以外の距離空間を指すのですか？

答． 違います．でも予想もしなかった質問でおもしろいです．もともと昔は，ユークリッド空間以外の空間など誰も想像できなかったと推測ですますが，何百年のも間の多くの研究者の不毛な研究 (副産物は多くあったと思いますが) の末，ボヤイやロバチェフスキーやガウスといった人たちが，史上初めて，平行線の公理を満たさないような，ユークリッド空間以外の空間 (単に距離空間ではなく，もう少し多くの構造があたえられたもの) を考えました．そのようなものを，通常，非ユークリッド空間と呼んでいます．深い歴史的経緯が関わっている用語です．

問． ★リーマン可積分関数全体に対し，$d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$ という「距離」を導入し，$d(f,g)=0$ ということで，$f=g$ を定めることに問題はないような気がしますが，どうでしょうか？

答． そのままでは距離の条件をみたさないので，考えている集合に同値関係をさだめ，その同値類の集合上の距離を定義したいということですね．なるほど．でも，これは解析学での常套手段ですね．いま，$[0,1]$ 上のリーマン可積分関数全体を Y とすると，関数 $d:Y\times Y\to\mathbf{R}$ が質問のように定義され，距離の条件 (2), (3) は成り立ち，(1) のうちの (1') $d(f,g)\geq 0, d(f,f)=0$ もよいが，(1") $d(f,g)=0\Rightarrow f=g$ のだけが成り立っていないので，距離ではないわけですね．しかし，Y 上の２項関係 $f\sim g\Leftrightarrow d(f,g)=0$ を定めると，これは同値関係になります．(1') (2) (3) を使って**各自確かめてください**．$X=Y/\sim$ とおき，$\bar{d}:X\times X\to\mathbf{R}$ を $\bar{d}([f],[g])=d(f,g)$ で定義します．ここで，$[f]\in X$ は $f\in Y$ の同値類を表します．この $\bar{d}$ が関数として「うまく定義できる」(well-defined) ことを示すためには,「$f\sim f', g\sim g'$ ならば $d(f,g)=d(f',g')$」を確認する必要があります．このことも (3) を使って**各自確かめてください**．しかも $\bar{d}$ は X 上の距離関数になります． d に関して成立している (1') (2) (3) を使って，このことも**各自確かめてください**．うむ．**これはなかなか良いレポート問題 (試験問題) になりますね**．そのうち使わさせてもらいましょう．