数学序論１１質問の回答　担当教官 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

No. 3 (１９９９年１０月２０日) の分

問．★ ε-近傍は必ず開集合にならないのですか？講義で，ε-近傍は，どこで考えるかに依存する，というのがありましたが，どういうことですか？

答．なります．$a \in I$ の I における ε-近傍を，$N(a;\varepsilon) := \{x \in I \mid |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap I$ で定義しました．ここで定義している ε-近傍は，ε-開近傍ともよばれるもので，I **の開集合**です．このことは，すぐに証明できます．質問の意図は，$\mathbf{R}$ の開集合とは限らないのではないか，ということと推測します．その通りです．何度も言っているように，開集合であるかどうかについては，**どこで考えているか，何の開集合か**，ということを常に意識していないと今後ますます混乱してしまいます．たとえ話をすると，**カメレオンの色は何色か**，ということに似ています．そのカメレオンが，どこにいるのか，ジャングルにいるのか (緑)，砂漠にいるのか (茶)，定山渓にいるのか (赤)，によってその答は当然変わってきますね．それと同じことです．たとえば，閉区間 $[0,1]$ は，$\mathbf{R}$ の閉集合であって，$\mathbf{R}$ の開集合ではありません．でも，$[0,1]$ は，$[0,1]$ の中では，$[0,1]$ の開集合です．また，たとえば，$[0,2)$ は，$\mathbf{R}$ の開集合でも，$\mathbf{R}$ の閉集合でもないが，$[0,3)$ の開集合であり，$[0,2)$ の開集合であり，$[0,\infty)$ の開集合です．$I=(0,1]$ のとき，I **における**，1 の $\frac{1}{2}$-近傍は，$(\frac{1}{2},1]$ であり ($(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ ではありません)，I の開集合であるけれど，$\mathbf{R}$ の開集合ではありません．よく注意してください．ε-近傍の定義に定義域 I が (見かけだけではなく，実質的に) 関わっているので，どこで考えるか，何における ε-近傍か，ということを意識しておかないと混乱するのが目に見えています．要注意事項です．

問．関数が連続ということを，この講義では数列を使って「$f: I \to \mathbf{R}$ が $a \in I$ で連続 $\Leftrightarrow$ a に収束する I の任意の点列 $\{x_n\}$ に対し，$\{f(x_n)\}$ が $f(a)$ に収束する」と定義しましたが，別の講義では ε-δ 論法で,「$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \delta \Leftrightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$」と教わりました．どうして，わざわざ数列を使った定義をしたのですか？定義というのは何通りもあるのですか？

答．講義で証明したように，上の２つの条件は同等な条件です．同等なので，どちらで定義しても混乱が起きないわけです．どちらで定義でしても，同等性が保証されているので，問題ないわけです．どちらで定義するかは，その人の好みの問題ということになります．実は，もし皆さんが，ε-δ 論法に慣れているのであれば，そこから出発した方が，今後の一般化には便利です．ε-δ 論法に慣れていない人のために，数列を使った定義から議論を出発したわけで，単なる教育的配慮でした．

問．★関数 $f: I \to \mathbf{R}$ の連続性の定義で，I が開区間のとき，a が I の集積点であれば，$a \notin I$ であっても a で連続ということが定義されると思いますが，どうでしょう？

答．自然な疑問ですが，連続の定義では，$f(a)$ が定義されている必要があるので，a が定義域に入っていないとまずいです．もし，$\lim_{x\to a, x\in I} f(x)$ が存在する場合は，改めて，$f(a) := \lim_{x\to a, x\in I} f(x)$ と定義すれば，$f: I \cup \{a\} \to \mathbf{R}$ となって，講義で扱った状況になりますね．

問．「$f: I \to \mathbf{R}$ が $a \in I$ で連続」ならば,「$f(a)$ を含む $\mathbf{R}$ の任意の開集合 U に対し，$f^{-1}(U)$ が I の開集合」というのは，なんとなくわかったのですが，その逆がわかりません．証明のヒントを教えてください．

答．「なんとなくわかった」というのは「まだわかっていない」ということだと思います．気持ちはわかりますが，こういうことははっきりさせましょう．それはともかく，逆の証明の概略を書いてみましょう．$\forall\varepsilon > 0$ をとる．$N(f(a);\varepsilon) \subset \mathbf{R}$ は $\mathbf{R}$ の開集合．仮定から，$f^{-1}(N(f(a);\varepsilon))$ は I の開集合．すると，$\exists\delta > 0, N(a,\delta) \subset f^{-1}(N(f(a);\varepsilon))$，つまり，$\forall x \in I, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

問．連続の条件を，開集合を使った条件で書き換えましたが，イメージがわきません．

答．開集合という概念を使った連続の定義は，よく考えれば,「近くの点は近くに写る」「ジャンプしない」，ということを的確に意味していることに納得してくるはずですが，まあ，一朝一夕には無理ですか．まずは論理的に納得してください．

問．閉集合を，補集合が開集合というのではなく，直接に定義できないのでしょうか？

答．できます．いろいろ定義の仕方があります．例えば,「閉包」という概念を講義でこれから導入しますが，それを使うと，閉集合とは,「それ自体の閉包と等しい」ような部分集合であると定義することもできます．この条件はもちろん,「補集合が開集合」という条件と等価な条件になります．

問．ユークリッド空間以外の距離空間でも連続関数は考えられますか？

答． 連続関数や連続写像という概念が，ほぼ同様に考えられます．講義で説明します．

問． $\mathbf{R}^n$ での ε-近傍は考えてきましたが，$\mathbf{R}^\infty$ での ε-近傍はありますか？$\mathbf{R}^\infty$ は存在するのか疑問に思いました．

答． $\mathbf{R}^\infty$ という記号は通常使いません．でも言いたいことはわかります．想定される対象として挙げられるのは，$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ で，これは $\mathbf{N}$ から $\mathbf{R}$ への写像全体の集合で，実数列全体の集合と同一視されます．また，そのうち，有限個の番号を除いて 0 である数列全体のなす部分集合も考えられます．こちらの方には，ユークリッド空間と同様に距離が入り，ε-近傍が考えられます．ともかく，カバに耳あり，ジョージにメアリー,「距離のあるところに必ず ε-近傍あり」です．

問． 距離空間で，常に $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$ (３角不等式を等号にしたもの) が成り立つものがもしあれば教えてください．

答． (なぜこんなことを考えるか不思議ですが) そんな距離空間はありません．ないということが簡単に証明できます．考えてみてください．

問． $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$ のとき $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ とのことですが，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ で，$|x_n - a| < 0$ となって変な気がします．

答． 数列の極限の理解が不十分です．復習してください．

問． 全単射 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{N}$ があると仮定すると，全射 $a : \mathbf{N} \to (0,1]$ が存在することがすぐにわかる，とのことですが，すぐにはわかりません．$\mathbf{R}$ の濃度と，$(0,1]$ の濃度は等しいのですか？

答． f は全単射なので，逆写像 $f^{-1} : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ があり，これも全単射ですね．いま，たとえば，$g : \mathbf{R} \to (0,1]$ を，$g(x) = 1 (x \le 0), g(x) = x (0 < x \le 1), g(x) = 1 (1 < x)$ で定めると，g は全射ですね．このとき，$a = g \circ f^{-1}$ (合成写像) とすればよいわけです．ほうら，すぐにわかりますね．ただし，以上のことは，背理法モード (仮想世界) での話であることを意識してください．$\sharp\mathbf{R} = \sharp((0,1])$ は，現実モードで正しい命題です．証明してみてください．

問． 対角線論法で，$(0,1]$ に属する実数 $a(n) = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots$ (小数展開) に対し，$b_n = 1$ (n : even), $b_n = 2$ (n : odd) とおいたとき，$b = 0.b_1b_2b_3\cdots$ が，どの $a(n)$ とも異なるのは何故ですか？

答． もし，ある n について，$b = a(n)$ と仮定してみましょう．すると，小数展開を比較して，$b_n = a_{nn}$ がわかります．ここで，右辺が偶数のとき左辺は 1 です，右辺が奇数のとき左辺は 2 ですね．これは矛盾です．したがって，任意の n について，$b \ne a(n)$ です．

問． ☆対角線論法で，$a(n)$ を小数展開するとき，$a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots$ に 0 でないものが無限個あるように展開するとのことですが，そうしないと何か不都合がありますか？b_n は，1 か 2 だから，そのように展開しなくとも，$0.b_1b_2b_3\cdots$ はどの $a(n)$ とも異なると思います．

答． 確かにそうですね．鋭い指摘です．ただし，$(0,1]$ に属する各々の実数の小数展開の形を１通りに確定するために,「 0 でないものが無限個ある」という条件をつけて展開する，つまり,「有限小数」も，無限小数の形に無理矢理展開する，ということが必要だったのです．

問． b_n の取り方は，別に「１」「２」でなくともよいとのことですが，どういうことですか？

答． 「３」「４」でも,「５」「６」でも「７」「８」でもよい，ということです．

問． 対角線論法は，$\sharp\mathbf{N} < \sharp\mathbf{R}$ を示す以外に，どういう状況で使いますか？

答． 集合 X のべき集合 (X の部分集合全体のなす集合) の濃度が，X の濃度より，真に大きい，ということを証明するときにも使います．それ以外は私 (石川) は知りません．

問． ★ $\aleph_0$ は数字ですか？また，数字ならば，$\aleph_0 = \max(\mathbf{N})$ ですか？$\mathbf{N}_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ とすると，$\sharp\mathbf{N}_k = k = \max(\mathbf{N}_k)$ から類推しました．

答． この質問には，よいセンスが感じられます．同時に少し危うい感じもします．$\aleph_0$ 普通の意味の数字ではありません．$\aleph_0$ は，あくまで「濃度」です．$\aleph_0 = \max(\mathbf{N})$ はそのままでは無意味な式です．なぜなら，$\mathbf{N}$ には最大数がないからです．また，$\sharp\mathbf{N}_k = k = \max(\mathbf{N}_k)$ とありますが，$\sharp\mathbf{N}_k = k$ の右辺の k は濃度を表すものであり，通常の自然数の k とは区別すべきものです．ただし，自然数それ自体を集合の濃度を使って構成するという立場からは，まんざら間違いでもありません．つまり，空集合 $\emptyset$ の濃度を 0 と定めます．空集合だけからなる集合 $\{\emptyset\}$ (要素は１つ) の濃度を 1 と定めます．空集合と「空集

合だけからなる集合」だけからなる集合 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (要素は２つ) の濃度を 2 と定める，といった具合です．まあ，独自に色々考えることは良いことです．一方では，既成の理論にのっとった推論を学ぶことも大切です．そうして，自分のアイディアを大切に育てていってください．子曰く,「学びて思わざれば則ち暗し，思いて学ばざれば則ち危うし」.

問．有限集合と可算無限集合のことを「高々可算集合」と言いますが，１つにまとめるからには何か同じ性質があるんじゃないかと思います.

答．X が高々可算であるということは，単射 $X \to \mathbf{N}$ が存在する，ということで特徴付けられます.

問．★ 他の本で,「X が無限集合 $\Leftrightarrow \exists A \subset X, A \neq X$, s.t. $|A| = |X|$ 」という定義を読んだので，そうすると，有限集合の定義も,「X が有限集合 $\Leftrightarrow \forall A \subset X, A \neq X, \Rightarrow |A| < |X|$ 」とできるでしょうか？

答．まさにその通りです．無限と有限の違いを明確に表現した良い定義ですね．もちろん，講義で与えた定義と同等です．考えてみてください.

問．★可算集合の有限部分集合全体の集合は可算ですか？

答．よい質問ですね．可算です．たとえば，次のように証明できます．まず，$\mathbf{N}^n$ は可算です．したがって，$\cup_{n=1}^{\infty} \mathbf{N}^n$ は可算です．この集合から，問題の集合への全射が作れるので，可算というわけです.

問．無理数全体の集合の濃度は何ですか？

答．回答書 No.2 でも書きました．実数の濃度と等しくなります．それはなぜか考えてみてください.

問．空集合というものがいまいちつかめません.

答．空集合 $\emptyset$ とは，要素 (元) をまったく含まない集合です．あえて書けば，$\emptyset = \{\ \}$ です．箱を想像してください．何も入っていないとき，その箱は空 (から) であるといいますね．数学では，空 (くう) である，といいます．空集合は，からしゅごう，ではなく，くうしゅうごう，と読みます．何も元 (げん, 要素) のない集合です．元 (もと) も子もないのが空集合です．空 (そら) に太陽があっても，空集合には何もないのです．こんなものを考えては空 (むな) しいとは言わずに，考えてみてください.

問．★集合 X, Y について，全射 $f : X \to Y$ と全射 $g : Y \to X$ があった場合，全単射 $h : X \to Y$ の存在を示すことができますか？全射 $X \to Y$ が存在すれば，単射 $Y \to X$ を構成できると思うのですが.

答．なるほど．まず後半については，$f : X \to Y$ が全射なら，各 $y \in Y$ に対し，逆像 $f^{-1}(\{y\})$ から１点を選ぶ，それを対応させることで，単射 $Y \to X$ が構成できますね．(正確には「選択公理」というものを使っていますが．) したがって，前半部に関して，ベルンシュタインの定理を使えば，全単射の存在が示せますね.

問．★集合 X, Y が同じ濃度であることを $X \sim Y$ で表すことにします．このとき，$A_1 \sim A_2, B_1 \sim B_2$ ならば $\mathrm{Map}(A_1, B_1) \sim \mathrm{Map}(A_2, B_2)$ となると思いますが，どうでしょうか？ここで，$\mathrm{Map}(X, Y) = \{f : X \to Y\}$ とします.

答．正しいです．実際に全単射が構成できるので，正しいわけです.

問．★集合とよぶべきものの全体の集合を Set とおくとき，濃度が同じという同値関係 $\sim$ で割った商空間 Set$/\sim$ に特筆すべき性質はありますか？

答．難しい質問ですね．ここでは，質問自体よりも,「集合とよぶべきものの全体の集合」という記述に注目させてください．たとえば，$Y = \{X$ 集合 $\mid X \notin X\}$ というものは集合と認めてよいか，という有名な話があります．もし，Y が集合と仮定するします．この場合，$Y \notin Y$ とすると，Y の定義から，$Y \in Y$ となります．$Y \in Y$ とすると，定義から，$Y \notin Y$ となります．これを「ラッセルのパラドックス」と言います．このような難点を回避するため，上の Y や Set は集合とは認めません．集合にしては“大きすぎる”，ということです．これらは，所謂「クラス」とよばれるものです.

問．質問の回答 No.2 で，２つの濃度にどれくらいの異なる濃度が挟まれているか，ということが出てきましたが,「はさまれている」ということはどういう意味ですか？

答．単射 $X \to Y$ が存在して，全単射 $X \to Y$ が存在しない場合，$|X| < |Y|$ と書き，X の濃度は，Y の濃度より，真に小さい，と言います．はさまれている，というのは，$|X| < |Z| < |Y|$ ということです.

問．濃度の記号 $|X|$ と絶対値の記号 $|x|$ と行列式の記号 $|A|$ が同じなのはなぜですか？閉包の記号 $\overline{X}$

と，高校で習った補集合の記号 $\overline{X}$ が同じなのはなぜですか？

答． 複素共役の記号 $\overline{z}$ も同じですね．**数学世界は豊穣**なので，記号の数が足りないからです．いわば "同形異義記号" です．

問． $0.1 = 0.0999\cdots$ は本当に正しいのですか？

答． 正しいです．$0.0999\cdots$ という数は，数列 $0.09, 0.099, 0.0999, 0.09999, \ldots,$ という数列の極限を表しています．無限小数はすべてそういう意味です．この極限は 0.1 に等しいですね．

問． $x, y \in \mathbf{R}^2$ に対し，$d(x, y) = 1 (x \neq y), d(x, x) = 1$ と定めるとき，平面 $(\mathbf{R}^2, d)$ では，図形の面積みたいなものはあるのですか？

答． 距離という概念と，面積という概念は，実は異質な概念であり，ユークリッド空間では，たまたま関係していた，と考えた方が良いかと思いますが，皆さんはどう考えますか？

問． 数学においてイメージとはどの程度必要なものでしょうか？

答． 非常に大切です．ただし，必要なのは豊かな，みずみずしい，自由で柔軟なイメージです．貧弱なイメージは，かえって理解の妨げになります．しかし，豊かなイメージを身につけるのは，一朝一夕には無理です．まず**論理的につめていく**，という作業を丹念にこなしながら，身に付けていくべきことであると考えます．それが数学の本当の勉強です．たとえば，画家のピカソの芸術的イメージはすばらしいですが，彼の初期の精緻なデッサンを見ると，基礎をしっかり身に付けていることがわかります．だからこそ自由な絵が書けたのだと思います．

問． 世の中に微分ができないものはありますか？机の角も拡大すれば結局丸みをおびているはずで，ミクロのレベルではやはり微分不可能な点はないように思えるのですが．

答． うむ．これは，**現実をどうモデル化するか**，という問題だと思います．そして，どうモデル化するかは，目的に大きく依存します．質問にあるモデル化は，古典的なもので，確かに有用な場面が数多くあります．ただし，それ以外のモデル化もあります．たとえば，離散化やフラクタル化においては，対象は，(いたるところ) 微分不可能と言えます．そして，どのモデルが現実をより良く記述，説明するか，どのモデルを選択すべきか，ということは重要な問題となりますが，**どのモデルが本当の現実か，というような問については，数学のあずかり知らぬところです．**

回答者から． 今回も，皆さんが質問を考える励みになるように，これは良い質問というものに印を付けてみました．☆が金賞，★が銀賞です．(賞金，賞状のたぐいはありません．名誉なだけです．) 質問を考える際の参考にしてください．(素朴な疑問を真剣に考え説明しているものを評価します．また，人まねも良いですが，やはり，オリジナリティーのある質問を高く評価していますね．) 関係ないですが，「の–ノート写して，う–うる覚えでは，ど–泥縄勉強しても無駄」「き – 聞いて納得，よ – 読むテキストも，り – 理解にゃまだまだ距離がある」「い – 忙しいけど，そ – 相談されりゃ，う – うまい回答見つけたい」．失礼しました．