

# 数学序論 1 1 質問の回答 担当教官 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

No. 2 (1999年10月13日) の分

問. 「濃度」という概念は、「個数」の概念の一般化とのことですが、どういうことですか？

答. ある星では、「1, 2, 3, たくさん」という区別しかないんだよ、と、宇宙旅行好きのある友人が言っていました。つまり、その星では、1個という概念と2個という概念と3個という概念と「たくさん」という概念しかないそうです。それではあまりにも不便なので、その友人は、概念を一般化して4個, 5個, 6個, ... という概念を教えたそうです。これが「概念の一般化」の例です。その友人は、その星の人々にそのことを伝道して歩いたそうですが、残念ながら、その星のだれも耳をかしてくれなかったそうです。こういってはその星の人々には申し訳ないですが、無知ということは悲しいことですね。ところで、地球でも、昔は「1, 2, 3, ...,  $n$ , ..., 無限」という個数の概念しかありませんでした。昔は、その程度で十分だったからでしょうが、近代になって、 $Q$  と  $R$  が区別できないというのではいろいろな議論が正確にできないということがあって、カントールという人が、それを一般化して、「集合の濃度」という概念を導入しました。しかし、その概念は、かなりわかりづらく、心理的抵抗があって、その当時はだれも耳をかしてくれなかったそうです。現代でも、本当に理解している人は少ないかもしれませんが、ともかく、このように、視野を広げる、世界を広げる、ということが概念の一般化ということですよ。

問. 無限集合を濃度で区別することにそんな意味がありますか？たとえば、 $N \times N$  が可算集合であるということはどう利用されますか？

答. 人類の英知の進歩、という意味があります。可算集合の無限部分集合が可算集合である、ということと、 $N \times N$  が可算集合であることを利用すると、 $Q$  が可算集合であることが証明されます。また、2つの可算集合の和集合は可算集合であるということも利用すると、無理数の集合  $R - Q$  が可算集合でない、ということがわかります。

問. 「濃度」と「濃度が等しい」という言葉の違いは何ですか？

答. 「濃度」は集合の「濃度が等しい」という同値関係による同値類のことを意味します。記号で  $\aleph$  ( $R$  の濃度) とか  $\aleph_0$  ( $N$  の濃度) で表されるものが、濃度の具体例です。

問. 実数, 有理数, 無理数の濃度の大小は？

答. 集合  $X$  の濃度を  $|X|$  で表すことにすると、 $|Q| < |R - Q| = |R|$  です。最後の等号はどうやって証明するでしょう？考えてみてください。(ベルンシュタインの定理を使えば、単射  $R \rightarrow R - Q$  をなんとかして構成すればよいわけです。)

問. 有限個の元からなる集合に濃度は考えないのですか？

答. 考えます。 $\{1, 2, \dots, n\}$  と濃度が等しい集合を  $n$  個の要素からなる集合であると言います。

問. 「個数」と「濃度」の概念の違いがわかりません。 $Q$  と  $N$  の濃度は等しいと習いましたが、明らかに、 $Q$  の個数のほうが、 $N$  の個数より多いと思います。

答. 前半は単に用語の問題です。通常は、「個数」というと有限個のものについてだけ考える、という違いがあるといえなくもありません。質問の最後の「個数」の意味がはっきりしていないので質問の意味がはっきりしませんね。

問. 濃度はなぜ濃度と言うのですか？どのあたりが「濃さ」なのですか？

答. 単に訳語の問題ですね。英語では cardinality あるいは cardinal number ですね。「濃度」は「基数」ともいいます。

問.  $N$  の濃度を  $\aleph_0$  (アレフ・ゼロ),  $R$  の濃度を  $\aleph$  (アレフ) としたとき、 $\aleph = \aleph_0^{\aleph_0}$  ですが、 $\aleph_0^{\aleph_0^{\aleph_0}}$  というのは具体的にどういうものでしょうか？

答.  $(\aleph_0^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$  ですが、 $\aleph_0^{(\aleph_0^{\aleph_0})} = \aleph_0^{\aleph} = 2^{\aleph} > \aleph$  です。 $2^{\aleph}$  とは、 $R$  から  $\{1, 2\}$  への写像の全体の集合の濃度です。言い換えると、 $R$  の部分集合の全体の集合 (べき集合) の濃度です。どんな集合でも、そのべき集合の濃度は、もともとの集合の濃度より真に大きいということが証明されています。ここで述べた事実のいくつかは、皆さんなら証明できると思うので、考えてみてはいかがでしょうか。

問. 集合  $A, B, C$  の濃度について、 $|A| < |B| < |C|$  のとき、 $|A|$  と  $|B|$  の比、 $|B|$  と  $|C|$  の比を比較することはできますか？

答. 難しい質問ですね。「比」ということと違いますが、2つの濃度の間に、どのくらいの異なる濃度が「はまれている」か、ということは重要です。たとえば、濃度で、1と5の間には、2, 3, 4という3種の濃度がありますが、5と555の間には、549種の濃度がありますね。 $\aleph_0$  と  $\aleph$  の間に濃度があるかないかという問題は極めて難しく微妙な問題です。

問．ベルンシュタインの定理に関して， $A$  から  $B$  への単射および  $B$  から  $A$  の単射がともに存在すれば， $A$  から  $B$  への全射も存在するのですか？

答．その通りです．

問．ベルンシュタインの定理についてですが， $A$  から  $B$  へ単射の存在のみが示せ， $B$  から  $A$  への単射の存在が示せなかったら， $|A| < |B|$  は示せますか？

答． $B$  から  $A$  への単射が存在しないことが示せれば，その通りです．これは濃度の大小の定義 (p. 31) からすぐにわかります．

問．どうしてわざわざ「濃度」という言葉を使うのかわかりません。「要素の個数」といえば良いのではと私は考えてしまいます．

答．それでもよいのですが，「無限集合の個数」というと誤解されることもあるので，「濃度」という専門用語を，明確に定義して導入したわけです．

問．物の個数を数えることと全単射の関係についての「みかん」の例がわかりづらかったです．

答．講義の説明は良くなかったですね．講義で述べたのと逆向きの矢印にして， $\{1, 2, 3, \dots, 100\} \rightarrow \{\text{みかん箱のなかのみかん}\}$  という写像を考えるべきでした．番号をみかん 1 つ 1 つに付けていく，というイメージです．こうすれば，「全射でない = 数えもれがある」「単射でない = 重複して数えている」というのがわかっていただけだと思います．「全単射 = 数えもれもなく，重複もなく正しく数えている」ということも説得力があると思うのですがどうでしょう？

問．教科書の見方によれば関数も写像であると言えますが，1 次関数とは言っても 1 次写像ということがあまりないのは何故ですか？

答．単なる慣習でしょう．ただし，線形代数では，1 次写像という言葉も使います．

問．写像  $f: X \rightarrow Y$ ， $A_1, A_2 \subset X$  について， $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$  が必ずしも成り立たない反例を教えてください．

答．教科書 p.28 の問 4.2 を解いてください．

問．いままで「... が全単射であることを証明せよ」などの問題は解いてきましたが，具体的に「全単射」で何がわかるかつかめません．

答．濃度が等しいことがわかります．無限集合だと考えづらいかもしれませんが，有限の場合で，たとえば「場合の数」「組み合わせの数」を計算するとき，計算しやすい集合との全単射を作って，それで計算するということは，必要不可欠な方法です．

問．全単射を「1対1対応」ともいうとのことですが，単射も「1対1」と表現されるときがあり，全単射は「上への1対1の写像」と，最近読んだ本にありましたが，どういうことでしょうか？

答．どれも OK です．講義では，1対1対応の「対応」に意味を持たせて，それで全単射の言い換えとしてわけです．

問． $\mathbb{Q}$  の上に有界な空でない部分集合に上限が必ずしも存在しないのはなぜですか？

答．上限が有理数の範囲では存在しないかもしれないということです．たとえば， $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$  の上限は有理数の範囲では存在しません．すなわち， $E$  の上界の全体の集合  $F = \{c \in \mathbb{Q} \mid \forall x \in E, x \leq c\}$  の最小数が  $\mathbb{Q}$  の中にはないわけです．最小数とは， $c_0 \in F$  であって，任意の  $c \in F$  に対し， $c_0 \leq c$  となる数のことですが，そんなものはない，ということが証明できます．ところが，実数の範囲で考えれば，明らかに  $\sqrt{2}$  が  $E \subset \mathbb{R}$  の上限ですね．このように実数の範囲で考えれば上限が存在する，このことが実数の上で微分積分学などを展開する理由です．

問．有界とか上界という考えかたは順序集合に通じる概念なのですか？

答．その通りです．順序集合の上で定義される概念です．

問． $a = \sup E$  なら  $a \in E$  だと思います．

答．違います．たとえば， $E = (0, 1)$  (开区間) のばあい，1 が  $E$  の上限ですが，1 は  $E$  の要素ではないですね．

問．実数の乗算の意味がわかりません．

答．デデキントの切断の方法で，実数を構成したことに基づいて考えれば，切断同士の掛け算が定義されれば良いですね．そのことは，p.17 の練習問題 2.6 を参照してください．補足説明にあった，無限小数の掛け算，という筋で説明すると，有限小数で近似し，掛け算をして，その極限で，掛け算の定義とします．したがって，指摘のように実数の掛け算は，日頃から何気なく使っていますが，なかなか高級な概念です．

問． $f: X \rightarrow Y$  が全射であることの定義が「 $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$ 」となっていますが，これだ

と  $X$  の中で  $Y$  に写らないものがあるように思われます。

答．この疑問は、写像の定義の理解が不正確であることから生じていると推測されます． $f$  が  $X$  から  $Y$  への写像であるといった段階で、 $x \in X$  はそれぞれ、必ず  $Y$  のある要素  $f(x)$  に写っているわけです．

問．写像  $f: X \rightarrow Y$  について、 $Y$  の部分集合  $B$  の逆像  $f^{-1}(B)$  は  $B$  の  $f^{-1}$  による像ではない、とのことですが、表面的には同じに見えます．どうして  $f^{-1}$  の像ではないのですか？

答．表面的には同じです．表面的に見ていても区別はつきません．問題は  $f^{-1}$  とは何ものかがわかっていないか、わかっていないか、という1点です．逆写像  $f^{-1}$  は、 $f$  が全単射のときに限って定義されます．ですから、一般論で、一般の写像  $f$  に対して、 $f^{-1}$  うんぬん、ということ定義に持ち出すのは無意味です．ナンセンスです、ばかっています．もう1度言います．逆写像は、全単射のときに限って定義されます．逆像の定義は、あくまで、

$$\{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

です．決して、

$$\{x \in X \mid \exists y \in B, f^{-1}(y) = x\}$$

ではないのです．逆写像  $f^{-1}$  がないので、無意味です．

問．関数を一般化したものが写像とのことですが、関数ではない写像とはどういうものですか？

答．単に用語の使用法の慣用の問題ですね．写像の行き先が  $\mathbf{R}$  の場合に (ときには  $\mathbf{C}$  の場合も) 関数と呼ぶという慣習があるだけです．写像と呼んでもよいわけです．関数は function で、一般の写像の意味で使用する (人) もいます．あまり神経質になる必要はありません．

問．「 $\mathbf{R}$  中の開集合であり閉集合であるような部分集合は  $\mathbf{R}$  か  $\emptyset$  に限る」という定理の最後の部分の「上限  $a = \sup E$  が  $E$  にも  $\mathbf{R} - U$  もの  $F$  にも入らない」ということが、なぜ定理を証明したことになるかがわかりません．

答． $U$  を  $\mathbf{R}$  中の開集合であり閉集合であって、 $U \neq \mathbf{R}$ ,  $U \neq \emptyset$  というものとする、 $U = E \cup F$  であって、しかも上のことが結論されたわけです．すると、 $a \notin U$  であり、かつ、 $a \notin \mathbf{R} - U$  となり矛盾が導かれます．どうして矛盾が出てくるかということ、このような  $U$  の存在を仮定したからです．つまり、背理法によって、そのような  $U$  が存在することはない、つまり  $\mathbf{R}$  か  $\emptyset$  に限るということが証明されたわけです．

問． $U$  が開集合かつ閉集合であるとき、 $\mathbf{R} - U$  は閉集合となっていますが、何故ですか？

答．問題は閉集合の定義は何かということですね．いくつかの定義の仕方がありますが、「その補集合が開集合のとき、閉集合とよぶ」という定義があります．(ほかの定義と等価ですから心配は要りません．) いま、 $\mathbf{R} - (\mathbf{R} - U)$  は  $U$  であり、開集合と仮定しているので、上の定義から  $\mathbf{R} - U$  は閉集合である、ということになります．定義通りなので、あっさり説明してしまいました．

問． $\emptyset$  が開であり閉であるということですが、逆に、開でも閉でもない、とはならないのですか？元を持っていないのに開も閉もへったくれもないと思えるんですが．

答．定義にしたがって冷静に論理的に考えるだけです．回答書 No.1 の回答を参照してください．自暴自棄になってはいけません．

問．「 $\mathbf{R}$  中の開集合であり閉集合であるような部分集合は  $\mathbf{R}$  か  $\emptyset$  に限る」という定理は、 $\mathbf{R}^n$  やその部分集合の場合はどうなりますか？

答．この定理は  $\mathbf{R}$  が連結である、と言い換えられますが、同じように  $\mathbf{R}^n$  は連結です．あとで講義で説明すると思います．その部分集合は、連結なものと連結でないものがあります．

問．連結であることの定義は何ですか？

答．いろいろ同値な定義の仕方がありますが、「開集合であり、かつ、閉集合である部分集合は、それ自体が空集合に限る」と定義されます．

問．「連結」とは具体的にどういうイメージになるのですか？具体例がほしいのですが．

答． $\mathbf{R}$  (数直線) は連結集合です． $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$  は連結集合ではありません． $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$  は連結集合です． $\mathbf{Q}$  は連結集合ではありません．

問．「上限定理」の証明において、「 $\gamma < y < x$  となる有理数  $y$  をとると」とあったのですが、 $y$  が有理数という条件は使っていないと思います．無理数  $y$  をとると不都合がありますか？

答．その通りです．不都合はありません．単に、教科書 p.15 の定理 2.1 を使っただけのことです．

問．他の講義で「上限定理」と「実数の連続性」は同値である、という話を聞いたことがありますが、同値であるのは何故ですか？

答. 「実数の連続性」を明確に定義しないと話になりませんが、実数の切断  $(A | B)$  を考えたとき、「 $A$  に最大数があるか、または  $B$  に最小数がある」ということを意味しているとすると、「上限定理」から  $a = \sup A$  ととれば、もし  $a \in A$  なら  $A$  の最大数であり、もし  $a \in B$  なら  $B$  の最小数であり、「実数の連続性」が導かれます。講義で示したように、「実数の連続性」から「上限定理」が導かれるので、結局、両者は同値である、ということです。

問. 上限の存在に関する定理で、 $A = \{c \in \mathbf{R} \mid \exists x \in E, c < x\}$ ,  $\gamma = \max A$  について、ある  $x \in E$  について、 $\gamma = x$  となっているのは？

答. 「ある仮定から出発し、論理的に正しく導かれた複数の結論が矛盾を導くということを示し、その仮定が正しくないということを論証する方法」が「背理法」です。指摘の部分は、 $A$  に最大数がない、ということ背理法で証明する途中の部分ですね。ですから、 $A$  に最大数があるという仮定から、論理的に導かれた結論は、あくまで誤った（実際には起きない）仮定から導かれたものであって、それ自体が正しいというわけではない、ということに注意してください。

問. 有界単調数列は収束する、とのことですが、どうして単調でなければならないのですか？別に単調でなくても収束する場合があります。

答. 有界かつ単調ならば収束すると言っているのであって、収束するのは単調な場合に限るなどと言っているわけではありません。必要条件、十分条件についてよく復習しておいてください。

問. 「Cauchy 列は収束する」という定理がありますが、「Cauchy 列  $\iff$  収束列」と考えて良いのでしょうか？それならば、Cauchy 列はどのようなところで使われているのでしょうか？

答. その通りです。Cauchy 列は収束する数列と同じ対象を指し示す用語です。しかし、それは、結果的に証明されることがらであって、Cauchy 列の定義と収束列の定義自体は、異なりますね。とくに、収束列の定義では、極限が指定されているわけですが、Cauchy 列の定義をみると、極限は表に現れていませんね。結果として、極限の存在つまり収束性が示されるけれども、ある数列が Cauchy 列かどうかを調べる際に、極限を表に出さなくて済むわけですね。これは有り難いことです。具体的には、たとえば級数の収束、発散を判定する際に利用します。微分積分や級数の教科書（の中）を眺めてみてください。

問. コーシー列とは具体的にどのような数列なのでしょう？

答. 収束する数列に他なりません。上の質問の回答のように、具体的でないから役に立つ概念なのです。

問. 「コーシー列が収束する」だけでは実数の連続性の公理として用いるのは不十分で、アルキメデス律が必要である、と本で知りました。では、「コーシー列が収束する」という公理だけを用いて得られる（つまり完備な）ものにはどんな例があるのでしょうか？

答. 質問の意味あいがいま 1 つはつきりしませんが、たとえば、実数  $\mathbf{R}$  と、それと同じもの（コピー） $\mathbf{R}'$  を用意して、 $X = \mathbf{R} \cup \mathbf{R}'$  とおきます。（ここで、 $\mathbf{R}$  と  $\mathbf{R}'$  は共通のある集合の部分集合というわけではないので、単に、2 つの集合の要素を別々のものとして併せてできる集合という意味です。たとえば、真贋を区別するわけです。こういう意味の和集合を disjoint union という場合があります。考えづらかったら、平面上の 2 本の平行な直線をイメージすると良いかもしれません。）この  $X$  に順序を  $x \in \mathbf{R}, x' \in \mathbf{R}'$  のとき、 $x < x'$  で定めると、 $X$  は順序集合になります。また、距離を、 $x \in \mathbf{R}, x' \in \mathbf{R}'$  のとき  $d(x, x') = \sqrt{(x - x')^2 + 1}$  で定めると、 $X$  は距離空間になります。 $\mathbf{R}$  の点同士、 $\mathbf{R}'$  の点同士は通常の意味の距離を考えています。また、上の定義中の  $x - x'$  は両者を普通の実数と思った引き算です。すると、 $X$  は完備であることがわかります。また、アルキメデス律が成り立たないこともわかります。この例が、質問の意図を的確にヒットしている自信がありませんが。

問. 距離空間の完備性の重要さがわかりません。ノルム空間が完備であればバナッハ空間であるとか、完備性が言えれば縮小写像の定理が成り立つことなどは知っていますが、それ以上の重要性がわかりません。

答. 完備性の重要性については、しばらくしたら講義の中で説明する予定です。

問. 「 $\mathbf{R}$  中の開集合であり閉集合であるような部分集合は  $\mathbf{R}$  か  $\emptyset$  に限る」ということの証明で、 $E \neq \emptyset$  の場合だけ示して、 $F \neq \emptyset$  のときは矛盾を記述しなくてもよいのですか？他の講義でもこのようなことが度々あるのですが。

答. もちろん書いたほうが正確で完璧な証明になります。しかし時間やスペースの関係で、くり返しになる部分を省略したわけです。ですから、もしその部分がわからなかったら、ぜひ自分で実際に証明のつづきを紙に書いてみてください。良い勉強になると思います。

回答者から. 今回は、皆さんが質問を考える励みになるように、これは良い質問というものに印を付けてみました。が金賞、が銀賞です。（賞金、賞状のたぐいはありません。名誉だけです。今回は金賞は該当なしでした。）質問を考える際の参考にしてください。