数学序論１１質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. １１ (２０００年2月９日) の分

問. 連結であるが弧状連結ではない位相空間の例はどういうものですか？

答. 教科書 p.120 に書いてあります．$X = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x > 0\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ に $\mathbf{R}^2$ から相対位相を入れると，連結ですが弧状連結ではありません．

問. ★連結であるが弧状連結ではない集合にわかりやすいものは無いのでしょうか？教科書にそのような例がありますが，以前，この例を "病的" な例と聞いたような気がします．このような "病的" な例しかないのであれば，２つの定義を別々に設ける必要性も少ないように感じるのですが．

答. うむ．でも，何をもって "病的" と判断するか明確な基準がないので，何とも言えませんよね．"わかりやすい" についても同様です．したがって，やはり「連結」と「弧状連結」はあくまで異なる概念であると認識すべきでしょうね．

問. 具体的な位相空間が弧状連結かそうでないかを判定するのはけっこう大変だと思います．判定するテクニックはありますか？

答. そうですね．大変ですね．でも，具体的な位相空間がそこにあるなら，そしてそれを調べたいのなら，がんばって弧状連結かどうか調べればよいと思います．

問. ★ X が弧状連結であることと連結であるということが同値である位相空間はどのようなものですか？

答. 質問の意味を私 (石川) がちゃんと理解できているか自信ありませんが，位相空間に関する何らかの条件があって，それが満たされている連結位相空間は弧状連結になるか？という質問だと推測しました．そのような条件はいろいろあると思いますが,「局所弧状連結」という条件はそのようなものです．それは「各点が弧状連結な近傍を持つ」という条件です．この場合，２点を連続な弧で結べるという同値関係を考えたとき，同値類が開かつ閉集合となり，その条件の下では，弧状連結という条件と，連結という条件が同値になるわけですね．より具体的に「多様体である」という条件はその十分条件です．つまり，多様体かつ連結 $\Rightarrow$ 局所弧状連結かつ連結 $\Rightarrow$ 弧状連結，です．ちなみに，弧状連結であっても局所弧状連結とは限りません．えっ？弧状連結と局所弧状連結が同値になるような条件は何か，ですか... 知りません．

問. 任意の部分集合が連結であるような連結空間は存在するのですか？

答. 存在します．たとえば密着位相空間ではそうですね．

問. 離散位相空間がただ１点からなるときは連結であるように思えるのですが，それ以外の時に連結である時はあるのですか？また，密着位相空間は連結であると思います．間違っていますか？

答. ありません．離散位相空間がただ１点からなるとき以外は連結ではありません．そのとおりです．密着位相空間は連結です．

問. ★弧状連結の定義で，$[0,1]$ の代わりに他の閉区間 $[a,b]$ を使うと違うことになるのでしょうか？

答. 同じ概念になります．それは，$[0,1]$ と $[a,b]$ が同相だからです．教科書 p.104 の問 13.6 (2) を参考にしてください．

問. 弧状連結ならではの性質というのは多いのですか？

答. 弧状連結なら成り立つということは多いといえます．たとえば,「基本群が基点の取り方によらない」といった利点があります．わかりますか？

問. 「弧」はただの曲線のことですか？中学校 (?) で「弧」は円の一部の事だとどんな曲線でもいいのですか？直線は？

答. 円の一部は，厳密には「円弧」ですね．ここでは,「弧」は連続な曲線を意味しています．直線も弧です．

問. $\mathbf{R}$ が連結かどうか，試験に出たとき，どうやって厳密に証明できるか，思い付きませんでした．

答. 私 (石川) の講義の第２回で証明していますよ．

問. $[0,1]$ が連結であることの簡単な証明はありますか？

答. ありません．もちろん，何をもって「簡単」とするか，という明確な基準がないので何とも言えませんが．$[0,1]$ が連結であることは，(この講義の最初の頃に説明した) 実数の構成に関わる深い事実なので，そうやすやすと証明できるわけがないと考えるとよいと思います.「幾何学に王道なし，数学にマクドなし」ですか．(マクド = マクドナルド．ファーストフード (ハンバーガー) の世界的なチェーン店のこと．お手軽さの比喩に使いました．関係者がいたらごめんね．)

問. 「$A \subset X$ が連結でない $\Leftrightarrow$ X の開集合 U, U' があって，$A \subset U \cup U', A \cap U \neq \emptyset, A \cap U' \neq \emptyset, (A \cap U) \cap (A \cap U') = \emptyset$」はどのように証明するのでしょうか？相対位相の定義に従って，地道にやればできるのでしょうか？

答. 地道にやればできます．

問. 上の条件で，$U, U', U'', \ldots$ と３つ以上にしたときは同じ条件ですか？

答. 違いますね．具体例：$X = \mathbf{R}, A = \{0,1\}$.

問. U, U' は開集合でなければいけませんか？なぜ閉集合ではだめなのかわかりません．

答. 閉集合ではだめ，などと言った覚えはありません．この場合，良く考えるとわかりますが，すべてを閉集合で書き直しても同値な条件になります．(中途半端に書き換えるとダメですが．)

問. ★「連結でない」という条件は「$\exists U, U'$, s.t. $A \subset U \cup U', A \cap U \neq \emptyset, A \cap U' \neq \emptyset, U \cap U' = \emptyset$」ではだめですか？もしだめなら反例を教えてください．

答. 同値ではありません．反例：3点からなる集合 $X = \{0, 1, 2\}$ に位相 $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, X\}$ を入れましょう．(位相の条件を確認してください．) そして，$A = \{1, 2\} \subset X$ としましょう．すると，A に X から入れた相対位相は，A 上の離散位相です．とくに $\{1\}$ は A の開かつ閉集合になります．したがって，A は連結ではありません．しかし，明らかに，上のような U, U' は取れませんね．したがって，講義で述べた条件が，連結でない，ということの同値条件になります．

問. 開かつ閉な集合の補集合は開かつ閉ですか？

答. そうです．

問. 開集合の補集合が閉集合ではなかったですか？だから閉であり開であるものがまずあるということがよくわかりません．

答. 開集合の補集合が閉集合です．具体例で説明しましょう．$A = [0, 1] \cup [2, 3]$ (2つの離れた閉区間の和集合．$\mathbf{R}$ の閉集合です) にふつうの位相を入れます．$[0, 1]$ は A の開集合です．($[0, 1] = A \cap (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ と表されるので．) ですから，$[2, 3]$ は A の閉集合です．($[0, 1]$ の A での補集合なので．) 一方，$[2, 3]$ は A の開集合です．($[2, 3] = A \cap (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ と表されるので．) ですから，$[0, 1]$ は A の開集合です．($[2, 3]$ の A での補集合なので．) 結局，$[0, 1]$ も $[2, 3]$ も A の開集合かつ閉集合です．

問. 定理「$f : X \to Y$ 連続写像，$A \subset X$ 連結集合 $\Rightarrow f(A) \subset Y$ も連結集合」とありますが，「$f : X \to Y$ 連続写像，$B \subset Y$ 連結集合 $\Rightarrow f^{-1}(B) \subset Y$ も連結集合」は成り立ちますか？

答. 成り立ちません．具体例を挙げましょう．$X = \{0, 1\}$ (2点からなる集合)，$Y = \{0\}$ (1点からなる集合) とし，それぞれ離散位相を入れ，$f : X \to Y$ を $f(0) = 0, f(1) = 0$ で定めると，f は連続ですね．$B = \{0\}$ とおくと，B は連結ですね．でも $f^{-1}(B)$ は $X = \{0, 1\}$ であり，連結でないですね．

問. ★ X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を写像としたとき，「任意の連結集合 $A \subset X$ に対し，$f(A) \subset Y$ が連結」が成り立つならば，f は連続写像であると言えますか？

答. 言えません．でもなかなか面白い問題ですね．さて反例を挙げましょう．$X = \{0, 1\}$ (2点からなる集合)，$Y = X$ とし，X には密着位相，Y には，$\{\emptyset, \{0\}, Y\}$ を開集合系とする位相を入れましょう．写像 $f : X \to Y$ は恒等写像をとります．すると，「任意の連結集合 $A \subset X$ に対し，$f(A) \subset Y$ が連結」は成立しますね．実際，Y の任意の部分集合は連結です．しかし，f は連続写像ではありません．実際，Y の開集合 $\{0\}$ の逆像 $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ は X の開集合ではありません．

問. 弧状連結，道連結，凸集合の違いはありますか？

答. 「道連結」の定義を知りませんが，もし「弧状連結」と同じ定義であれば，同じ概念です．ただし，「凸集合」は，もっと特殊な状況，たとえば，$\mathbf{R}^n$ の部分集合に限って定義される概念なので，まったく異なる概念と考えるとよいでしょう．では，話を $\mathbf{R}^n$ の部分集合に限ることにすると，「凸集合」は，「その中の2点がその集合のなかで線分で結ぶことができる」というものです．一方，「弧状連結集合」は，「その中の2点がその集合のなかで連続弧で結ぶことができる」というこのです．違う概念ですね．当然，凸ならば弧状連結ですが，逆は成立しません．具体例を挙げましょう．「へ」の字は，弧状連結ですが，凸ではありません．

問. 定義の名前でイメージを持つことは危険でしょうか？

答. 危険ですね．「名は体を表す」と言いますが，そうでもないこともあるので．定義そのものを理解して，そこからイメージをふくらませせることをお薦めします．

問. 可算無限とは，無限というほどではないが，ものすごく膨大な数ということなのですか？

答. 違います．まず「可算無限」は数ではなく，集合の濃度である，ということを思い出してください．(「基数」と言いかえると，質問もまんざら間違いではありませんが，それは話がもっと先に進んでからのこと．) 可算無限は，無限の一種です．自然数全体の集合の濃度であり，「かぞえることができる」という意味です．

問. いかなる位相とも「大きい」という関係をもつ「超位相」(仮名) は存在するのですか？

答. 離散位相のことですね．集合 X の上の離散位相は，X 上のどんな位相よりも大きいですね．

問. ★ $\emptyset \subset A$ は定義ですか？

答. 「$\subset$」 の定義から必然的に導かれることです．質問の補足説明の中にありましたが，「$B \subset A \Leftrightarrow (\forall x \in B, x \in A \Rightarrow x \in A)$」に従って考えれば，$B = \emptyset$ の場合，右辺の命題は真なので，当然，$\emptyset \subset A$ であるわけです．

問. 完備であるということは，任意のコーシー列が収束することですが，何がわかったり導かれたりするのでしょうか？完備についてはミステリアスです．

答. 以前も言いましたが，コーシー列の定義に極限があらわに登場しないので，コーシー列という概念と収束列という概念が同値な概念になる完備な距離空間では，いろいろなことが議論しやすいわけです．私 (石川) は全然ミステリアスに感じないのですが…

問． $\mathbf{R}$ の極大元はないということですね．

答． 極大元はないです．極小元もありません．

問． 集合と位相は他のどの分野でも前提とされて話が進んでいくということですが，やはり位相の概念がしっかりわかっていると理解度はかなり違うのでしょうか？

答． はい，違います．

問． 位相はすべての分野で重要であるということですが，複素関数論との関わりはどんなことですか？

答． 複素関数論では，複素平面の領域の位相を調べるが大切になります．また，その領域上の複素数値関数の連続性を調べることも重要ですね．また，その領域上の関数空間を距離空間や位相空間と見て，研究することも重要です．こんなところでどうでしょう？

問． コンパクト集合と出てきたら有界閉集合と考えてもいいですか？コンパクトと有界閉というのはどちらが広い概念ですか？

答． 考えてはいけません.「コンパクト」の方が「有界閉」よりずっと広い概念です．いままで何度も説明していますが，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合に関しては同じ条件になります．ですから，もし，自分は将来ずっと絶対に $\mathbf{R}^n$ の部分集合しか扱わないぞ，という自信があれば，同じ概念と思っていてもかまいません．でも，それでは人間の知的好奇心は満足されないませんね．やはり，どうしても広い世界に羽ばたきたくなるものです．一般の距離空間を扱うとき，有界閉と言う概念とコンパクトという概念に意味の隔離が生じます．コンパクトなら有界閉ですが，逆は成立しません．反例があります．さらに一般の位相空間を扱う場合は，もはや距離を考えていないので，有界という概念自体が意味ありません．これはもう，コンパクトの勝ちですね．

問． 勉強したことを理解する，ということはどの程度のことを言うのですか？僕は成績はよくないのですが，正直勉強のやり方がよくわかりません．質問書の解答に定義を正確に理解しながら，論理的に考えて進めていくと書いてありましたが，よく参考書等では定理や命題の証明がたくさん書いてありますが，そういう証明を自分で理解できなければ理解したとは言えないのですか？また，付随している問題等を解くことはできないのですか？参考書を読んでも１ページの中に分からないことが多くてかなりの時間がかかるのですが.

答． 誰でもみんなそうです．私 (石川) も苦労しています．結局，証明を理解しよう理解しようという，そのプロセス自体が大切ではないでしょうか？実は**理解しようとするプロセスそのものが理解するということ**ではないかな.

問． 証明問題に関する有効な解法はありますか？たとえば，証明すべき問題の対偶を証明するという発想はどこから生まれるのですか？

答． **試行錯誤をくり返す**ことです．つまり，ああでもない，こうでもない，そうでもない，どうしようもない，でもあれはうまくいくかもしれないからダメモトで試してみよう，などと考えるわけです．そうしていくうちにだんだん問題が解けてきます．(解けないかもしれませんが．) 対偶をとるのも，背理法で証明するのも，あくまでいろいろ試してみて上手くいくかな，だめかな，という過程を経た上で採用しているわけです．また，そのままの問題では解くのが難しい場合，その問題の仮定を満たすような具体例を１つ取り上げて，その問題の結論が本当に成り立つかどうか，その結論が成り立つことはどうやって示されるか，を試しに考えてみることもよくあります．ただしそれがうまくいった場合でも，その具体例特有の性質を使って示されているかも知れないので，もともとの問題に戻って，その証明が通用するかどうか，証明を書き直す必要があります．当然ですね.

問． 石川先生が数学の道へ進もうと決心したのはいつごろですか？

答． 数学の道へ進もうと決心したことはありませんでした．ただ好きだからやっています．数学はやればやるほどおもしろくなります．でも一方では，いまでも，将来は小説家なんかになるのもいいかな，と夢見ています．夢見る中年です.

問． 石川先生は，義務教育の内容が削られようとしていることをどう思いますか？円周率が「およそ 3.14」から「およそ 3」になろうとしています．台形の面積を求める公式も必要ないそうです．私は悔しいですし，さみしいです.

答． 同感です．いま日本の (世界の？) 数学教育の水準は坂を転げ落ちるように急激に下降していますね．そのうち「およそ 3」が「$\pi = 3$」ということになるでしょうね．円周率は自然数であるということになってしまうでしょうね．そのうち四捨五入して，$\pi = 0$ となるかもしれませんね．円の長さも 0, 円の面積も 0 になるんですかね．もしそうなったら，いやな世の中ですね．まあ，そんなことにはならないかな．ところで，常々私 (石川) が常々感じていることですが，世の中には，脳みそを使うとすり減ってもったいない，無駄で役に立たないようなことは極力頭に入れたくない，いかに物を考えずに済ますかということをいつも考えている，といったような人がいるようです．まあ，どういう生き方をしてもよいのですが，そういう生き方は，たとえばコンピューターにたとえると，せっかく巨大な容量のハードディスクがあるのに，そのすみっこのせまーい場所だけを使って満足しているようなもので，それこそもったいない限りですね．使わないと，当然ハードディスクも「錆び付く」わけですね．(ほんとかな．使い過ぎて壊れるのかな．それはともかく) 将来のある子供たちの頭脳を錆び付かせちゃダメですね．無駄でも何

でも，どんどん頭を使って考えるようにした方がよいですね．どんどんスポーツで体を鍛えるのが大事なようにね．今言われている「ゆとり教育」は,「与える情報を減らす」というものですが，そうではなく，「多くの情報を与え，その情報をゆとりをもって選別する能力を鍛える」という方向に教育は進むべきでしょうね．ではそのとき，どういう情報を提供したらよいか，というと，長い人生だから，若いときにしか身に付かないことようなことを，できる限り多く教えるべきでしょうね．すぐに役に立つような実用的なことは，大人になったらいやでも勉強しなければならない現代社会なので，どちらかというと，**大人になってから柔軟に何でも勉強できるような能力**のほうを，子供のうちは鍛えるべきですね．