数学序論１１質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. １０ (２０００年１月２６日) の分

問. 「位相の開基」や「基本近傍系」という言葉を初めて聞いたのですが，何のための概念なのでしょうか？

答. 位相を使いこなすための概念 (用語) です．たとえば，$\mathbf{R}^2$ のユークリッド位相は皆さんにおなじみですね．点列の収束性や，関数の連続性なんかをよく扱いますよね．たとえば，$\mathbf{R}^2$ 上の実数値関数 $f(x,y)$ が「点 $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ で連続」というのをどう定義したでしょうか．そう,「$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall(x,y) \in \mathbf{R}^2, d((x,y),(a,b)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$」でしたね．ここで，$d$ はユークリッドの距離です: $d((x,y),(a,b)) = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$．さて，この条件は,「$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, N((a,b);\delta) \subset f^{-1}(N(f(a,b);\varepsilon))$」と書き換えられますね．ここで $N((a,b);\delta)$ は点 (a,b) の δ-近傍です．$N(f(a,b);\varepsilon)$ は $\mathbf{R}$ における $f(a,b)$ の ε-近傍です．よく考えると，この連続の条件は,「$\forall n \in \mathbf{N}, \exists\delta > 0, \forall(x,y) \in \mathbf{R}^2, d((x,y),(a,b)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(a,b)| < \frac{1}{n}$」と同じ条件ですね.「$\forall\varepsilon > 0, \exists m \in \mathbf{N}, \forall(x,y) \in \mathbf{R}^2, d((x,y),(a,b)) < \frac{1}{m} \Rightarrow |f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$」も同じ条件です.「$\forall n \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N}, \forall(x,y) \in \mathbf{R}^2, d((x,y),(a,b)) < \frac{1}{m} \Rightarrow |f(x,y) - f(a,b)| < \frac{1}{n}$」とも同じですよね．またこの連続の条件は,「$\forall n \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N}, N((a,b);\frac{1}{m}) \subset f^{-1}(N(f(a,b);\frac{1}{n}))$」と書き換えられますね．どういうことかというと，位相の一般論としては，開集合系を扱うわけなんですが，$N((a,b);\delta),(\delta > 0)$ という (開) 近傍系でも，連続性などの議論ができる，$N((a,b);\frac{1}{m}),(m \in \mathbf{N})$ という (開) 近傍系でも議論ができる，ということですね．この $N((a,b);\delta),(\delta > 0)$ は，$(a,b) \in \mathbf{R}^2$ の基本近傍系です．$N((a,b);\frac{1}{m}),(m \in \mathbf{N})$ も $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ の基本近傍系です．(「集合の集合」はわかりずらいので，通常はこんな書き方もするわけです．) $N((a,b);\delta),((a,b) \in \mathbf{R}^2, \delta > 0)$ はユークリッド位相の開基です．$N((a,b);\frac{1}{m}),((a,b) \in \mathbf{R}^2, m \in \mathbf{N})$ もユークリッド位相の開基です．さて，このように開基や基本近傍系の取り方はいろいろありますが，まあ**少なくてすむのであればそのほうが良い**ので，どのくらい少ない開基や基本近傍系が取れるか，ということを問題にするわけです.「可算公理」はそのことと関連します.

問. 「位相の開基」と「ベクトル空間の基底」に関連性はありますか？

答. たしかに用語が似ていますね．でも数学的に「位相の開基」に対応する概念を線形代数で探すとしたら,「ベクトル空間の生成系」の方だと思います．このように同じ言葉でも使う文脈で微妙に意味が変わってくる，という現象は当然生じることです．たとえば国語辞典が手許にあれば，１つの単語に，複数の意味が並んでいるのを観察出来ますね.

問. ★位相空間 $(X,\mathcal{O})$ について，$\mathcal{O}$ 自身は $\mathcal{O}$ の開基になりますか？

答. なります．よいところに気が付きましたね.

問. 任意の位相に必ず開基はありますか？

答. 直前の質問が答えになっていますね.

問. 位相の開基は,「コンパクト」という概念に近いというイメージがしますが，これは誤ったイメージでしょうか？

答. 補足説明を読んで，なるほどと思いました．イメージが正しいとか，誤っているとかは無論言えませんが.「有限個の開基がとれる」などといった条件を念頭においているのかと思いますが,「コンパクト」の方は「任意の開被覆に有限部分開被覆がある」なので，定義の意味あいがかなり違いますね．たとえば，$[0,1] \subset \mathbf{R}$ はコンパクトですが，有限個の開基はとれません．可算無限個の開基はとれます．(第２可算公理はみたします．)

問. 今日の証明にあった $\mathcal{O} := \{\cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \mid \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{B}\}$ がよくわかりません．この書き方だと，$\{U \mid U \subset \mathcal{B}\}$ と一緒ではないでしょうか？

答. 確かにすぐにはわかりづらいかも知れませんね．$\mathcal{B}$ は X の位相の開基で，X の部分集合の集合であることをます思い出しておきます．このとき，上の定義を言い換えると,「$\mathcal{B}$ に属する集合をいくつか (無限個でもよい) 持ってきて，その和集合として表されるような X の部分集合の集まり」が $\mathcal{O}$ です．ちなみに，$\{U \mid U \subset \mathcal{B}\}$ は,「$\mathcal{B}$ に属する X の部分集合の集まり」なので，$\mathcal{B}$ そのものですね．当然 $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ ですが，通常 $\mathcal{B} \neq \mathcal{O}$ です.

問. 開基のところでの定理で,「ある位相」の開基となるための必要十分条件というもので出てきましたが，その「ある位相」というのが何なのかわかりません.

答. 直前の質問に出てきた $\mathcal{O}$ のことです.

問. 教科書 p.106 の開基の説明のところに出てくる，$\mathcal{T}$ と V の関係がよくわかりません.

答. $\mathcal{T}$ は V の集まりです.

問. 基本近傍系の定義で,「a の近傍からなる」ある集合系 $\mathcal{B}(a)$，とありますが，それは，$\mathcal{B}(a)$ の任意の集合はすべて a の近傍である，ということなのですか？

答. そういうことです.

問. 集合系 $\mathcal{B}(a)$ が a の基本近傍系である，という定義は，a の任意の近傍 N に対し，$U \in \mathcal{B}(a)$ が

あって，$U \subset N$ ですが，集合系である必要がわかりません．一番小さな近傍をとれば，上の条件をみたすのではないですか？

答． うむ．でも,「一番小さな近傍」というものは，ふつう存在しないですよね．たとえば，$\mathbf{R}^2$ において，$(a,b) \in \mathbf{R}^2$ の一番小さな近傍とは何でしょう？そんなものは存在しませんね．ちなみに，１点からなる部分集合 $\{(a,b)\}$ は (a,b) の近傍ではありません．一番小さな近傍がないので，かわりに基本近傍系を考えるわけです．１人じゃだめだけど，みんなで協力して助け合って分担すれば良い，ということかな．

問． 位相空間と言っても，ほとんどユークリッド距離空間でしか考えていないと思います．そうでない場合も同じように考えられるのですか？

答．「想像力をたくましくすれば」考えられますね．ユークリッド距離空間以外のものも，講義でも密着位相やら離散位相やらを考え，プリントでは，ザリスキー位相まで考えました．ちょっと難しいけれど，がんばって，想像力を鍛えましょう．

問．「距離位相」とは何ですか？

答． 距離から一意的に決まる位相のことです．今回,「位相の開基」という概念を勉強したので，それをさっそく使うと,「距離位相とは，すべての ε-近傍 $(\varepsilon > 0)$ からなる集合系を開基とする位相のことである」と説明できます．

問． ★距離空間は第２可算公理をみたさないのですか？第１可算公理をみたしたからといって第２可算公理をみたすとは限らないという事なのですか？第１可算公理をみたすが第２可算公理をみたさないものなどあれば教えてください．

答． みたすとは限りません．具体例を挙げましょう：$X = \mathbf{R}$ にふつうの位相ではなく，離散位相をいれます．つまり，離散距離 $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $d(x,y) = 1, (x \neq y), d(x,x) = 0$ を考え，そこから決まる位相を考えます．この距離空間は，距離空間なので，講義で説明したように第１可算公理をみたしますが，第２可算公理はみたしません．実際，任意の開基 $\mathcal{B}$ について，$\{\{x\} \mid x \in \mathbf{R}\} \subset \mathcal{B}$ が示されます．ここで，$\{\{x\} \mid x \in \mathbf{R}\}$ は，各 $x \in \mathbf{R}$ について，その x １点からなる集合 $\{x\}$ の集合です．$\#\mathbf{R} = \#\{\{x\} \mid x \in \mathbf{R}\} \leq \#\mathcal{B}$ であり，$\mathcal{B}$ は可算集合ではあり得ませんね．あまり良くない例で恐縮ですが，ともかく例になっていますね．

問． 可算公理は第２までですか？

答． そうだと思います．もちろんいろいろ考えられるかも知れませんが，私 (石川) の知っているかぎり第３はない (普及していない) と思います．

問． 近傍という概念は数えることができるのですか？

答． 概念を数えるということではなく，近傍１個，近傍２個，と数えるという意味です．近傍の集合の濃度を考えるわけです．

問． 第１可算公理の定義に「可算個の近傍」ということが出てきますが，$\mathcal{B}(a) = \{N(a; \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$ の，N は可算ではないと思うのですが．

答． N が可算ということではなく，自然数全体の集合 $\mathbf{N}$ が可算ということです．

問． 可算個と有限個の違いがわかりません．「可算」というのはどういう意味ですか？具体的に教えてください．$\mathbf{Q}$ の濃度は $\mathbf{N}$ の濃度と等しいのですか？

答． うむ．この講義の最初の方 (濃度のところ) で説明したはずなので，復習してください．

問． ワークシートの問題「連続写像 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ で，$f(\mathbf{R})$ が $\mathbf{R}$ の開集合でないような具体例を１つ挙げ，説明せよ．ただし，$\mathbf{R}$ には通常のユークリッド距離位相を入れる.」の解答を教えてください．

答． 皆さんの知っている連続写像 (関数) を列挙してみたら，その中に解答が必ず含まれているはずです．あとは，その f について，$f(\mathbf{R})$ が $\mathbf{R}$ の開集合でない，ということを証明すれば良いので，誰でもできますね．解答は１つではなく，星の数より多くあります．

問．「位相空間 X の点列 $\{x_n\}$ が X の点 x に収束する」という定義を「$\forall \varepsilon > 0, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$」で書き換えても良いですか？

答． これはいけませんね．何がいけないかというと，$|x_n - x|$ がいけませんね．$X = \mathbf{R}^n$ の場合ならともかく，一般の位相空間上では，引き算もないし，絶対値 (ノルム) もないからです.「無い袖は振れない」わけです．そういうわけで，そんな風に書き換えちゃダメダメ．

問．「位相の大小」はどんなことに役立つのでしょうか？

答． いろいろな場面で使いますが，この講義では,「直積位相」や「商位相」の定義をするとき役立てる予定です．補足プリントを見てください．

問． 位相の大きさが比べられない具体例はどのようなものがありますか？

答． 教科書 p.112 の例題 14.3 をみてください．そこに具体例があります．それ以外なら，たとえば，$X = \{1,2\}$ 上の位相 $\mathcal{O}_1 = \{\emptyset, \{1\}, X\}$ と $\mathcal{O}_1 = \{\emptyset, \{2\}, X\}$ は大小関係がありませんね．

問． なぜ，位相が小さいことを「あらい」というのですか？

答． これから説明する「連結性」と関係させて説明するとわかりやすいかも知れません．位相空間 X の部分集合 A が連結であるとは，A に相対位相を入れたとき，A の開かつ閉な集合が，A か $\emptyset$ しかない，ということでした．言い換えると,「X の開集合 U と V について，$A \subset U \cup V$ $A \cap U \cap V = \emptyset$ ならば，

$A \cap U = \emptyset$ または $A \cap V = \emptyset$」という条件が，A が連結であるという条件になります．したがって，A が**連結でない** という条件は,「X の開集合 U と V があって，$A \subset U \cup V$ $A \cap U \cap V = \emptyset$ かつ $A \cap U \neq \emptyset$ かつ $A \cap V \neq \emptyset$」となります．いま，X に２種類の位相 $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ を考え，$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ とします．つまり，$\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ より小さいとします．すると，位相 $\mathcal{O}_1$ で考えると，**開集合が少ない**わけだから，連結でないという条件は成立しづらい，連結になりやすい，ということになります．位相が小さいほうが連結になりやすい，位相が大きいほうが連結になりづらい．位相が小さいほうが「おおざっぱ」「粗い」，位相が大きいほうが「こまかい」という感じでしょうか．

問． ☆X を集合，$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を X の位相として，$\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ より小さいにもかかわらず，$(X, \mathcal{O}_1)$ と $(X, \mathcal{O}_2)$ が同相になることはあるのでしょうか？

答． 非常によい質問ですね．発想はほとんどプロ級と言っても過言ではありませんね．あとは，その疑問を自力で解決していく実力を身に付けていけば良いわけです．質問の例はたぶんあるだろう，と私 (石川) の職業的直感は言っていますが，具体例が思い付きませんでした．ごめんね．

問． プリントの質問ですが，ハメル基とは具体的にはどんなものなのでしょうか？$\mathbf{R}$ を $\mathbf{Q}$ 上のベクトル空間としたときの基とはいったい何ですか？何けた続くかわからない無限に続く数をそんな１次結合で表される基底があるのでしょうか？

答． 存在はしているが，具体的にはわからないもの，と考えるとよいと思います．あれば安心，保険のようなものでしょうか．

問． $\mathbf{Z}$ が整列集合でないのはなぜですか？

答． $A = \mathbf{Z}$ は，$\mathbf{Z}$ の空でない部分集合ですが，A に最小元がないからです．

問． 「$X = \mathbf{N}, Y = \mathbf{N}$ のコピー」の言葉の意味がわかりません．

答． 小林秀雄の評論文 (随筆) に「真贋」というのがありましたね．質問に答えようとしたら，突然思い出しました．それはともかく，同じ構造をもった集合を２つ用意するという意味です．たとえると，みかん１番，みかん２番，みかん３番,... と，りんご１番，りんご２番，りんご３番,... を用意します．そして，みかん君たちが無限に並んでいるその後ろにりんご君たちに並んでもらう，割り込まないで，整列してもらうということです．

問． 帰納的順序集合の例はありますか?帰納的というと，数学的帰納法を思い出しますが，$\mathbf{N}$ は，$\{2n\} \subset \mathbf{N}$ に上界なんかないから，帰納的ではないし．

答． なるほど．でも，$\mathbf{N}$ に１つ元 ∞ を付け加えて，$X = X \cup \{\infty\}$ とし，順序を $\mathbf{N}$ の部分は，そのまま自然数の順序を入れ，∞ は $\mathbf{N}$ のどの数よりも大きい，と**定める**と，この順序に関し，X は帰納的順序集合になりますね．ここで，∞ はもちろん通常の数ではないので，$\infty \notin \mathbf{N}$ に注意してください．

問． $\mathbf{R}$ の極大元は ∞ で，$\mathbf{R}$ の極小元は $-\infty$ ですか？

答． 違います．∞ は数ではないので，$\infty \notin \mathbf{R}$ だから，∞ の極大元ではありません．∞ は数列や関数が無限に発散する状態を表す記号であって，実数ではない (複素数でもない，何でもない) ということに注意しましょう．

問． プリントにある図の意味がわかりません．

答． ４つの要素からなる集合に順序を入れたものの説明の図です．言い換えると，$X = \{a, b, c, d\}$ に対し，順序を，$c < a, d < a, c < b, d < b$ であり，他の組み合わせに順序関係がない，という順序集合を図示しています．このとき，X の極大元は a と b であり，a と b 自体は比べられませんね．

問． 最大元をもつ順序集合は，全順序集合ですか？

答． 違います．たとえば，$X = \{a, b, c\}$ で，$c < a, b < a$ で，b と c に大小関係がないと定めると，この順序に関して，X は全順序集合ではないですが，最大元 a を持ちますね．

問． ★ツォルンの補題は，他の講義でも出てきたのですが，そのときツォルンの補題は証明できないものとして扱われました．本当に証明できないのでしょうか？

答． 確かに，ある意味ではそうです.「選択公理」とよばれるものを仮定してはじめて証明できます．実は「ツォルンの補題が成立すること」と「選択公理を仮定すること」はおなじことである，ということが証明されます．通常われわれが学んでいる数学は,「選択公理」を認めて，その上に構築されているのですが,「選択公理」を認めず，それなしでがんばろうという数学もあり得るのです.「選択公理」というのは,「無限個の集合系があったとき，各集合か要素を１つずつ取り出すことができる」というもので,「無限の操作を行う」という点がやや微妙な問題を生じさせるのです．(無限も可算無限ぐらいだったら，まあ問題ないのですが...)

問． ★無限次元ベクトル空間の場合でも，基底の濃度は一定ですか？

答． よい質問ですね．基底の濃度は一定であることは知られているのですが，私 (石川) は証明を思い付きませんでした．証明を考えてみてはいかがでしょうか．

問． 集合を「原始共産制」，順序集合を「階級制」にたとえていますが，どういう意味ですか？

答． ただのもののたとえです.「原始共産制」は，原始時代にみんな平等であった状態を意味します．つまり順序がまったく与えられていない状態ですね．でも，私 (石川) は原始時代を知らないので，本当にみんな平等であったかどうかは，かなり疑問なのですが．

問. 「公理」は「定義」や「定理」と意味的にどう違うのですか?「定理」と「命題」の違いは何ですか?

答. 「公理」や「定義」や「定理」という言葉は，ユークリッド幾何学に起原があると考えられます．まず，言葉の「定義」をして (無定義語というのもありますが)，それから，いくつかの互いに矛盾しないような「公理」を仮定して，その「公理」や「定義」だけに基づいて論理的推論をくり返し,「定理」を証明していく，というのが，つい最近まで，何千年もの間，すべての学問の典型だったわけです．最近は，それに則っていない学問も増えてきましたが... それから,「定理」と「命題」の厳密な区別は知りませんが，いくつかの「命題」や「補題」を積み重ねて証明できるような，その理論にとって重要と考えられる命題を「定理」と呼ぶようです．

問. 我々が今学んでいる学問のどの辺りが「数学」なのですか?「すうがく」の「すう」は「数 (數)」ですが，最近，数学で見た「数」は，0 や 1 ぐらいで,「17」等という中途半端な数をこのところ１年程見た記憶がありません．“mathematics” はギリシャ語の「学ぶ」という語から派生したそうなので「　学」等と呼ぶべきではないでしょうか？もしかしたら，つついて蛇を出すために「數學」なのでしょうか？

答. なるほどね.「やぶへび」の「薮」のくさかんむりを取り去ると「数」になるというわけですね．それはともかく，具体的な数は出てこなくても，n というのはいつも出てくると思いますが，(n が自然数を表している場合) すべての自然数を n で代表させているので，すべての数を同時に扱ってのであって，われわれはいつでも数を扱っているといえますね.「数学」という訳が良いかどうかは別の問題ですけどね．ところで突然ですが，私 (石川) は「ジャングル数学」と「砂漠数学」を比べると,「ジャングル数学」の方が好きです．薮をつついて蛇を出す数学ですね．砂漠に住む蛇もあるそうですけどね．

問. 仮名は数学の記号として認められないのですか？今まで使ってきた記号は，アルファベットやギリシャ文字やドイツ文字や筆記体 (?) やヘブライ文字など，すべて西洋系だと思われますが．

答. 数学はインドあたりが発祥の地で，ギリシャ文明あたりで発展した経緯があるので，西洋中心の記号を使っているわけですね．こういう記号などは，定着したものを変えるのは難しいでしょうね．それはともかく，私 (石川) は，記号などどうでもよい，**大事なのは中身である**と思いますが．

問. なぜか最近，やっと数学をやりたくなってきたのですが，今まで全くやっていないので，何から手をつけてよいのかわかりません．休み期間中，どのように勉強すればよいのでしょうか？

答. それは喜ばしい限りですね．そうですね，必要な知識は，意欲があれば何とか身に付いてくると思うので，とりあえず，数学に関する「啓蒙書」を読んで，何か具体的に興味が持てる分野を探すのが良い方法と思います．本屋の店頭に，多くの数学の本が並んでいるので，立ち読みしてみて，おもしろそうで，あまり難しくなく (全然歯が立たないとこまります)，あまり易しくなく (少しはわからないことが書いていないと読むかいがありませんね) なるべく薄めの通読可能な本を決めて，購入して，休み中に少しずつ読みすすめると良いかなと思います．

問. 個人的には数学が扱っているのは自然な概念だと思います．石とか木とかと違って，実際見たり触ったりできないけど，そのままそこにあった (元々あった) ものを扱っていると感じます．数学が作ったものだと思われるのは，僕 (ら?) の努力不足でしょうか？

答. 私 (石川) も賛同します．作ったと感じられる数学は良くない数学でしょうね．でも，それを本当に見極めるのは，やはりそれなりの修行を積んでからでないと無理かなとも思います．

問. 「覚えるなら定理より定義を」とおっしゃいましたが，定義は覚えないとどうしようもないのではないでしょうか？数学は暗記科目ではない，というのは正しいと思いますが,「覚えるなら」ということは，定義を知らなくても数学はできるものなのですか？

答. この質問にあるように，定義が大切，ということをわかってくれていれば何の問題もありません．まったくその通りです．ただ，定義が大切ということを全然わかっていない人も，ひょっとして，万一，いるかもしれないので，定義の大切さを強調したわけです．それはさておき，本当は，その定義が本当に自然なものと実感し，誰が考えてもこの定義に落ち着くわな，といった感じで定義を理解できるが理想なんですが，なかなかそのような境地に到達するのは難しいんですが...「定義を知らなくても数学はできるか」と聞かれたら，できないこともない，と答えたくもなるのですが，まあ，少なくとも学生時代は，定義を正確にふまえながら，論理的に数学を学んでいくべきであると，私 (石川) は思います．

問. この数学序論１１で学んだ位相入門は今後どの分野のどの講義を取れば深く学んでいくことができるでしょうか？また石川先生は，来期はどんな講義を受け持つのでしょうか？何も知らなくてすみません．

答. 「何も知らない」ということを知っているので，何も知らないわけではないと思います．あっ，これは冗談です．それはともかく,「集合」「位相」はこれ以上深く学ぶというより，現代数学の基本的概念・言葉として，何を学ぶにしろ必要になります．ですから，どの分野，どの講義，と限定はできないのですが，たとえば，幾何系の講義では，どの講義でも集合と位相の知識は当然のように仮定します．また，解析系の講義でも多くの講義で集合と位相の知識を仮定します．代数系でも，集合と位相の知識やその論理的推論などは役に立ちます．応用系でも，たとえば集合論やグラフ理論など関係する分野は多くあります．ともかく，**集合と位相は現代数学の基本**なのです．ところで，私 (石川) は，来年度は前期は数学序論１，後期に「多様体入門」(幾何学４) の講義を受け持つ予定です．幾何学４では集合と位相の知識を前提にしています．もちろん念のため復習しながら講義を進めていく予定ではありますが．ではまた．