数学序論１１質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. １ (１９９９年１０月６日) の分

問．「位相」というのはどういうものですか？「位相」と言われても，何だか良くわかりません．どのような事を考えて勉強していけば良いですか？

答． 位相 (Topology) という場合,「位相」という概念を指す場合と，それを基にした学問 (トポロジー) を意味する場合があります．この講義では，主に，前者，つまり位相という概念自体を意味します．位相の基本は開集合という (補助的) 概念です．ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の開集合とはどういうものか知っていますね．その際，$\mathbf{R}^n$ の開集合は境界上の点を含まない，という性質 (この場合，開集合の定義と同値) があります．もし，$\mathbf{R}^n$ の２つの開集合で共通部分のないものがあったら，それらの和集合は，両者を仲介するようなそれぞれの境界上の点を含んでいないので，連結集合ではない，ということになります．このように，連結性，つまり，つながり具合を調べるには，どの部分集合が開集合か，開集合でないか，が指定されていれば判断できます．もちろんその指定の仕方には制約 (位相の公理) がつくけれども，それ以上のデータは必要ないんですね．このように開集合系が指定されている状態を「位相が入っている」と言います．開集合系を指定することを「位相を入れる」と言います．開集合系が違えば「位相が違う」，開集合系が同じならば「位相が同じ」と言います．開集合系が指定されている集合 (空間) を「位相空間」と呼びます．この意味での「位相」は「位相構造」と呼ぶべきものです．このことを「群」と比較してみましょう．集合に，ある種の条件をみたす演算が指定されている状態を「群構造が入っている」，演算を指定することを「群構造を入れる」と言います．演算が違えば「群構造が違う」，演算が同じなら「群構造が同じ」，演算が指定されている集合を「群」と呼びます．なぜか「群空間」とは呼びません．代数的な概念だからでしょうか．ともかく，このように「位相」という概念は,「群」と同じ様に，ある種の構造を指し示すものであると言えます．

問． 位相はどのように役にたちますか？単に問題を解くことにしか使っていないので，定理や研究などでの使われ方を教えてください．

答． 一言でいうと，位相という概念によって空間の連結性と写像の連続性が明確に記述できます．これは基本的なことがらなので，位相幾何，微分幾何，関数論，関数解析，測度論，代数幾何，解析幾何，環論，整数論，グラフ理論，力学系，表現論，特異点論，大域解析，確率論などなど数学のほとんどすべての分野で役に立ちます．したがって，数学を使う科学一般で役に立ちます．位相を使わないのは一部の法学と文学ぐらいであると言ったら言い過ぎかな．それとは別に，位相を扱うには論理的思考をほどよく使うので，論理的思考の良い訓練になります．いままで，なんとなくごまかして論理的に考えず，その場を切り抜けてきた人は，位相のところで必ずつまずきます．(まあ，その場合でも，この講義を聴いて勉強すれば大丈夫です)．皆さんは，多分，何らかの意味で数学と一生かかわっていくことになると思うので，この際，本腰をいれて位相の勉強をしてください．位相を理解できるかどうかが，数学を本当に良くわかっているかどうかの１つの目安になるのは確かです．以上のことは皆さんが今後数学を勉強していくうちにわかってくると思います．(ただし,「問題」を解くことも重要だと思います．なんらかの (21) 世紀の難問を，もし君が解決したら，北大の，日本の，そして人類の誇りになりますね．)

問． 位相は歴史的にどのような概念の抽象化なのですか？

答． 極限，収束，距離，連結，連続などの概念と密接に関係して抽象化された概念です．歴史的には，位相空間が意識的に研究されだしたのは，２０世紀になってからなので，比較的新しい概念と言えますが，それでも百年くらいは経っているわけです．

問． 位相とは何かと聞かれたら，どう答えたら良いですか？位相とはこれだ，という言葉や短文を教えてください．

答．「手相」は「手」の相,「位相」は「位」の相，位相 (Topology) の Topo は場所・位置の意味，-logy は学問の意味もありますが，言葉，表現するもの，状態というような意味，つまり,「位相」は位置の状態，では答えにならないですね.「位相とは，空間の連結性や写像の連続性を明確に表現するための根源的な構造の概念である」ではどうでしょうか．この説明では難しいですか.「位相は，はなれた切れた，つながった，ということ」ではどうかな．まあ，しかし考えてみると，重要なことほど説明しづらいという傾向はあるかなと思います.「数学」とは何か？「幸福」とは何か？「自由」とは何か？「死」とは何か？物事が分かれば分かる程，深く考えれば考える程，一言では答えられなくなりますね.「い - いまはだめでも，そ - そのうちわかる，う - 倦まずたゆまず根気よく」これが学問，人生の基本ですな．

問． ここで言う位相 (Topology) は，物理でいう位相 (phase) とは関係ないのですか？

答． (講義でも言ったように) 無関係です．

問． $U \subset \mathbf{R}$ が開集合であるという定義

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, \forall x' \in \mathbf{R}, |x - x'| < \varepsilon \Rightarrow x' \in U$$

を詳しく説明してください．

答． まず，読み方の１例を挙げると,「U に属する任意の x それぞれに対し，正の数 ε を適切に選ぶと，任意の実数 x' について，もし x と x' の距離が指定された ε より小さければ，x' は U に属する」となります．１点 x からの距離が ε より小さいような (ここでは $\mathbf{R}$ の) 点の集合を，x の ε-**近傍** と呼びます．すると，開集合の定義は，次のように読みかえられます：「U に属する任意の x それぞれに対し，正の数 ε を適切に選ぶと，x の ε-近傍は U に含まれる 」となります．この条件命題の否定は,「そうではない」つまり「条件をみたさないものがある」ということだから,「U に属するある x があって，それに関しては，正の数 ε をどんなに選んだとしても，x の ε-近傍は U に含まれない 」となりますね．これを論理記号を使って再現すると，

$$\exists x \in U, \forall \varepsilon > 0, \exists x' \in \mathbf{R}, |x - x'| < \varepsilon \text{かつ}\ x' \notin U$$

となります．

問． $U \subset \mathbf{R}$ が開集合であるという定義のところで，$|x - x'| \leq \varepsilon$ と等号を入れても同じ定義ですね．

答． そうです．

問． 空集合 $\emptyset$ は $\mathbf{R}$ の開集合ですか，閉集合ですか？

答． 開集合でもあり，閉集合でもあります．つまり，どちらでもある，というわけです．

問． 講義で，開集合や閉集合を説明する例え話として，すべての窓が開いている室 (開) とすべての窓が閉じている室 (閉)，が出てきました．その際，開であり閉でもある室は，窓のない室である，とのことでした．その類推でいくと，開集合であり閉集合でもある集合は，空集合ということになると思いますが．

答． 窓は外界との「境界」にたとえられます．窓がないということは，境界がないということのたとえです．$\mathbf{R}$ の場合は，$\mathbf{R}$ と $\emptyset$ だけがそれに該当します．ところで，例え話はあくまで例えなので，単なる参考にするだけにして，それに惑わされないように注意してください．

問． $\mathbf{R}$ について，$\mathbf{R}$ という集合そのものは，開集合，閉集合のどちらになるのですか？定義にあてはめて厳密に考えればできそうなので，家に帰って考えてみます．

答． ぜひ考えてみてください．

問． 空集合や全体集合が開集合であり閉集合でもあるというのは，そう考えると都合が良いからそう考えると習ったのですが，いま一つわかりません．

答． $U = \emptyset$ の場合，開集合の定義の $\forall x \in U$ に該当するものがありませんね．何もチェックする必要がなければ，正しいですね．だから，空集合は開集合です．また，U が空集合なら，閉集合の定義 (補集合が開であるという定義)

$$\forall x \notin U, \exists \varepsilon > 0, \forall x' \in \mathbf{R}, |x - x'| < \varepsilon \Rightarrow x' \notin U$$

の結論の $x' \notin U$ は常に成り立ちますね．結論が常に成り立てば，正しいですね．だから，空集合は閉集合です．また，U が全体に一致する場合，開集合の定義の結論の $x' \in U$ は常に成り立ちますね．だから，開集合です．閉集合の定義の $\forall x \notin U$ は該当するものがないので，正しく，閉集合です．このように，都合が良いから，というより，当然そう考えるべきだから，そう考えるのです．

問． 有理数全体は $\mathbf{R}$ の開集合でも閉集合でもないのは，なぜですか？

答． 定義からわかります．有理数のどの近傍にも無理数があり，無理数のどの近傍にも有理数があるということが効いています．

問． $\mathbf{R}$ の 1 点だけからなる集合は，開集合でも閉集合でもない気がします．

答． $\mathbf{R}$ の 1 点だけからなる集合は，$\mathbf{R}$ の開集合ではなく，$\mathbf{R}$ の閉集合です．

問． $U \subset \mathbf{R}$ が閉集合であることを論理的に記述すると，

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon \geq 0, \forall x' \in \mathbf{R}, |x - x'| \leq \varepsilon \Rightarrow x' \in U$$

となるのではないかと思いますが．

答． この記述は正しくありません．実際，この定義では，どんな部分集合 $U \subset \mathbf{R}$ も閉集合になってしまいますね．($\varepsilon = 0$ と取れてしまうので．)

問． n 次元 $(n \geq 2)$ の空間でも，開集合でも閉集合でもない例はありますか？

答． たとえば，$\mathbf{R}^2$ で，$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y > 0\}$ はそのような例です．いくらでもあります．

問． 開集合であるということは，どこで考えているか明記しないと意味がないとのことですが，それはどういうことですか？

答． たとえば，$\mathbf{R}$ のなかで $\{0\}$ は $\mathbf{R}$ の開集合ではないですが，$\{0\}$ は，$\{0\}$ のなかで考えると，$\{0\}$ の開集合です．また，同じように，$\mathbf{R} \times \{0\} \subset \mathbf{R}^2$ (x 軸) は，$\mathbf{R}^2$ の開集合ではないが，もちろん，$\mathbf{R} \times \{0\}$ の開集合ではあります．このように，開集合という場合，必ず，××の開集合という必要があるわけです．それを省略すると混乱します．

問． 距離空間には位相が入るとのことですが，距離空間でないと位相は入らないのですか？距離空間でない一般の空間にも位相を入れることができるのですか？

答． 入れることができます．たとえば代数多様体を研究する場合，距離は使わず，ザリスキー位相という特別な位相を入れて研究することがあります．また，どんな集合 X についても，開集合系として，$\{X, \emptyset\}$ を指定すれば位相空間にできます (密着位相)．また，開集合系として，X のすべての部分集合の集合を指定すれば，やはり位相空間にできます (離散位相：どんな部分集合も開集合！)．

問． 距離が決まれば位相は unique に決まるのですか？

答． そうです．距離が決まれば，その距離から自動的にきまる位相構造があるわけです．

問． 距離の入れ方によって，位相の入れ方も異なるのですか？

答． これも良い質問ですね．そうです．たとえば，$\mathbf{R}$ に次のような (普通考えるものとは違った) 距離を考えましょう：$d(x,x') = 1 (x \neq x'), d(x,x) = 0$. (距離の条件を確かめてみてください．) この距離から定まる位相は，通常の $\mathbf{R}$ の位相とは異なり，離散位相になります．

問． 距離という言葉がわかりません．

答． 教科書 p. 48 を見てください．

問． 距離ということはわかるのですが，距離空間という具合に,「空間」がつくと，どう考えたら良いかはっきりしません．

答． 単に，距離関数 $d : X \times X \to \mathbf{R}$ が指定された集合 X のことである，と考えれば良いのです．

問． 講義と直接は関係ありませんが，連続と一様連続の違いがわかりません．連続はある点に関して，一様連続は全体的にと言った友達もいたのですが，よくわかりません．

答． その友達は基本的には正しいことを言っています．$f(x) = x^2$ は $\mathbf{R}$ 上の実数値関数と考える場合，連続だけど，一様連続でないですね．ε-δ 論法で，与えられた ε に対して，δ が一様にとれるか，ということですが，グラフを見ればわかるように，$|x|$ が大きくなれば δ は小さく小さくとらなければならないので，一様連続ではないのです．ちなみに，連続という概念は「位相構造」に関わる概念ですが，一様連続という概念は位相構造ではなく,「一様構造」とよばれるものに関わる概念です．

問． デデキントの方法の切断のところで，場合分けの (4) が起きないのはなぜですか？また，(1) 〜 (3) は実際起きるのですか？

答． 教科書 p. 13 を参照してください．

問． デデキントの方法では，有理数の切断に対し，どうやって実数を具体的に指定するのですか？

答． デデキントの方法は，無理数をいかにとらえるか，その１つの方法として「切断」という考え方を用いるものです．その際，切断そのものを数と考えるのがミソです．皆さんは，すでに実数について確固たるイメージを持っているので，かえって考えづらいと思いますが，そのイメージは少し横に置いて，$\mathbf{Q}$ の切断そのものを実数と考えるのです．有理数は，ある特殊な切断とみなされ ((1) のケース)，それ意外の (3) のタイプの切断１つ１つを無理数１つ１つとみなそうという発想です．実際，このような切断同士に，($\mathbf{Q}$ に指定されているものと矛盾しないように) 足し算はじめ４則演算が定義され，また順序も定義され，皆さんの持つ $\mathbf{R}$ のイメージ通りのものが構成されます．(教科書の pp. 14–17 参照．)

問． 無理数と無理数の間に有理数はありますか？

答． ２つの異なる無理数と無理数の間に有理数はあります．切断の言葉を使うと，２つの異なる切断 $(A|B)$, $(A'|B')$，ただし，$A \subset A', A \neq A'$ を考えると，A' に属して，A には属さない有理数 r があるから，それに対し，新しく A'' を r 以下の有理数の全体とし，B'' を r より大きい有理数の全体とおけば，$(A''|B'')$ は有理数 (タイプ (1) の切断) であり，２つの無理数の間にあります．

問． 超越数について教えてください．

答． 実数は，有理数と無理数の２つに分けられるのとは別に，代数的数と超越数に分けられます．代

数的数は，代数方程式の解であるような数で，有理数や $\sqrt{2}$ などはその例です．代数的数ではない実数を超越数と言います．π (円周率) や e (ネピアの数，自然対数の底) は代数的数ではないことが証明されています．したがって，これらは超越数です．残念ながら，与えられた数が超越数かどうかを判定するのは難しい問題です．そのために超越数論という分野があります．

問． 実数の切断とは何ですか？また，それで新しい数は出てこない，ということはどういうことですか？

答． $\mathbf{R}$ の部分集合 A, B で，$A \cup B = \mathbf{R}, A \cap B = \emptyset$, $a \in A, b \in B$ ならば $a < b$ をみたすものへ $\mathbf{R}$ を分けたものを $\mathbf{R}$ の切断と呼びます．このとき，場合分けの (3) (4) が起きないことがわかります．教科書 p. 16 参照．

問． 有理数の切断による実数の構成と，$\mathbf{R}$ の連結性には何か関係があると思うのですが．

答． 関係があります．実数を構成する仕方に基づいて，$\mathbf{R}$ が連結であることが厳密に証明されます．

問． デデキントの方法以外に，$\mathbf{Q}$ から $\mathbf{R}$ を構成する方法はありますか？

答． コーシー列を使う方法があります．いわゆる「完備化」の方法です．講義で説明するかもしれませんが，自分で図書室にある本や数学辞典などで調べてみてはいかがでしょうか．

問． $\forall, \exists$ のような論理記号を使う利点は何ですか？

答． 記述が簡単になるからです．ちなみに私 (石川) は，このような隠語 (?) は，なるべく使わないように心掛けていますが，ついつい使ってしまうこともあります．数学基礎論の専門家以外はだいたい同じ感覚で使っていると推測します．

問． 「命題 $(\neg P) \vee Q$ が真であることと，命題 $P \Rightarrow Q$ が真であることが同等」ということが証明できません．

答． $(\neg P) \vee Q$ が真ということは，P が偽であるかまたは Q が真ということですね．これは，P が真であれば Q が真であるということですね．これは，$P \Rightarrow Q$ が真であるということですね．

問． 無限というものを，どういうふうにとらえれば良いですか？

答． とりあえず「無限」を 2 種類に分けてとらえると良いかもしれません．集合の「濃度」の無限と，「順序」に関する無限です．集合が無限集合であるということは講義でこれからやります．少し違ったニュアンスの無限は,「無限大」ということと関わって現れます．$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ などに出てくる ∞ ですね．この場合，無限大は，どんな有限の数より大きくなる数列の状態を表していて，大小関係，順序構造と関係した無限です．濃度の無限とは一応無関係ですね．

問． 集合の差を $X - A$ いうふうに表しても良いのでしょうか？以前，$X - A$ と書いてはダメだという先生がいたので，$X \backslash A$ と書いてきたのですが．

答． もちろんそれで結構ですが，私 (石川) は，$X - A$ という記号を使っています．これは，$X \backslash A$ が等質空間で使う記号と紛らわしいからです．確かに，$X - A$ も紛らわしい状況があります．(とくに線形空間で考える場合など．) どんな記号を使っても，誤解されるときは誤解されます．その場合，説明が必要なときに十分説明できるように常々心掛けておくことが大切かと思います．(いわゆるアカウンタビリティーっていう奴ですね．)