トポロジーの考え方

石川 剛郎 (北大・理・数学)
Preliminary Version 2 for エンレイソウの会．２００４年１０月

1 トポロジーとは？

「**トポロジー** (topology [1])」と言った時，トポロジーという”概念”を意味する場合と，その概念を使ったものごとのとらえ方 (”方法”) を意味する場合とがある．
トポロジーとは，一言で言えば「**ものごとのつながり具合を表現する概念**」
トポロジーは「**柔らかい幾何学**」
連結 (connected)：つながっている状態を意味する形容詞.
空でない２つの閉集合に分けられる[2]—連結でない．空でない２つの閉集合に分けられない—連結である.
どうつながっているかを気にする．たとえば，円筒とメビウスの帯は，両方とも連結であるが，そのつながり具合が異なっている.

2 トポロジーの基本用語抄

同相 (homeomorphic)：形容詞．ある図形 (領域) が，別の図形 (領域) と，そのつながり具合をまったく保って移し合わせることができること.「位相的に同型」とか「topological に同じ」とも言う．使用例：三角形 (の境界) と円周は同相．(関連語．homeomorphism(名詞)).
イソトピー (isotopy)：名詞．図形を同相のままで移動する変形のこと．使用例：結び目理論は，結び目をイソトピーで分類する理論.
ホモトピー (homotopy)：名詞．図形 (正確には”写像”) の連続的な変形のこと．その際，曲線や曲面を１点につぶすなどの操作は (連続的であるかぎり) 許される．使用例：メビウスの帯を円周に変形するホモトピーがある．(関連語．homotopic(形容詞)).
開集合 (open set)：名詞．扱っている図形 (領域，空間) の中の点の集まりで，各点に十分近い点がその集まりに属するようなもの．”境界点”を含まない集合.「位相」の概念は，開集合という言葉を使って厳密に述べられる.
閉集合 (closed set)：名詞．扱っている図形の中で，補集合 (残りの部分) が開集合であるもの．”境界点”をすべて含む集合．使用例：連結とは，空でない２つの閉集合には分解できない状態のこと.「開集合」の代わりに「閉集合」をもとに「位相」の概念を述べることもできる.
連続写像 (continuous mapping)：名詞．ある図形から別の図形への対応関係で，”ジャンプ”が生じないもの．行き先の近さを出発点の近さによってコントロールできるような対応．連続写像で写せば，連結なものは連結なものに写る．関連語：連続な (continuous)：形容詞.

3 トポロジーの分野

一般トポロジー (general topology)：位相空間論，次元論．(位相空間の一般論).

[1] トポロジー (topology) の ”topo” は「位置」とか「場所」といった意味だそうである．したがって，昔は topology は「位置解析」と呼ばれていた.「位相」という訳を誰がつけたかは知らない.
[2] 空でない２つの**開**集合に分けられる，ということと等価である．しかし，閉集合で述べた方がわかりやすいので，閉集合を用いた説明を採用することにした.

代数トポロジー (algebraic topology)：ホモトピー論，ホモロジー・コホモロジー論，幾何学的群論．(代数的な位相不変量のための研究)．
微分トポロジー (differential topology)：４次元多様体論，リーマン多様体の位相，力学系，位相変換群論，シンプレクティック・トポロジー，特異点論．(微分幾何や数理物理などとの関連を追求)．
低次元トポロジー (low dimensional topology)：結び目理論，３次元多様体論，空間グラフ理論，４次元多様体論．

註：トポロジーの専門家が皆この分け方に同意する，というわけではない．

トポロジーは２０世紀になってから発展した数学(２１世紀に応用が花開く！)

4 トポロジーの歴史(１９世紀まで)

この節の内容はセントアンドリュース大の web-page

`http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Topology_in_mathematics.html`

による．

「トポロジー」は，オイラー (Euler) にはじまる．１７３６年に「ケーニヒスベルグの橋の問題」を解決した論文を出版した．(Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis 日本語で「位置の幾何学に関係する問題の解決」．オイラーは明らかに，距離という考え方にとらわれない幾何学を扱っている．この論文では，７つの橋を一回ずつ渡る問題が不可能であることを示しただけではなく，問題を一般化し，現代の言葉で言えば,「グラフが，各辺を１回だけ通る経路をもつための必要十分条件は，２頂点の次数が奇数であるか，または，すべての頂点の次数が偶数であること」を示している．)

さらに１７５０年にオイラーは，多面体の頂点の個数 v, 辺の個数 e，面の個数 f について，

$$(1)\ v - e + f = 2$$

が成り立つという，有名なオイラーの公式を記した手紙を残している．この簡単な公式が，多面体に関して多くの研究を残したアルキメデス (Archimedes) やデカルト (Descartes) には見逃されていることは興味深い．オイラー以前の人たちにとって，計量が関係しないような幾何的な性質を想像することが不可能だったことがその理由だろう．

オイラーは１７５２年にこの公式の詳細を２つの論文にして発表している．第１論文では証明に至っていないが，第２論文では，多面体を４面体に分割することによる証明を与えている．オイラーは，この驚くべき巧みな証明が，凸多面体にしか通用しないことには気づいていない．

オイラーによって始められたトポロジーの流れは，あまり知られていない数学者ルイリエール (Lhuilier, 1750-1840) によって受け継がれた．彼は一生のほとんどをオイラーの公式に関係した問題に費やした．１８１３年に彼は重要な論文を発表した．オイラーの公式は，穴の開いた多面体については正しくないことを注意し，もし，g 個の穴が開いている場合，

$$(2)\ v - e + f = 2 - 2g$$

が成り立つことを示した．

メビウス (Möbius) は，１８６５年にいわゆる「メビウスの帯」に関して書いている．メビウスは，メビウスの帯に裏表がないという性質を「向きづけ不可能」という言葉で記述している．彼は，この曲面を整合的に向きのついた３角形で覆うことができないことを見つけた．

「トポロジー」(topology) という言葉を初めて使ったのはリスティング (Listing, 1802-1882) である．リスティングのトポロジーに関するアイディアは，ほとんどガウス (Gauss) に依っている．(ガウス自身にトポロジーに関する著作はないが)．リスティングは１８４７年に「Vorstudien zur Topologie」(トポロ

ジーの予備研究) という論文を書いているし，それ以前も書簡でトポロジーという言葉を使っている．１８４７年の論文では，複体 (complex) という概念も導入している．リスティングは，１８６１年にメビウスの帯を記述した重要な論文を発表している．メビウスの４年前である．そこでは，曲面の連結性についても研究している．

曲面の連結性を研究しているのは，リスティングが最初ではない．リーマン (Riemann) は１８５１年 (２５歳のときの学位論文)，それから１８５７年の論文で曲面の連結性を論じている．１８５７年の論文とは，リーマン面が導入された．代数方程式 $f(w, z) = 0$ の研究から生じた．z を変化させたとき，この方程式を満たす $w(z)$ (一般には多価関数) がどう変化するかが問題である．リーマンは多項式 $f(w, z)$ から定まるリーマン面を導入した．リーマン面の上では，関数 $w(z)$ が一価関数となる．

ジョルダン (Jordan) は，曲面の連結性を調べるもう一つの方法を導入した．ジョルダンは，曲面上の単純閉曲線 (サーキット) が一点に連続的に変形できないとき，それを (既約) サーキットと呼んだ．その曲面のすべてのサーキットが整数係数で

$$m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots + m_na_n$$

と一通りに表されるような既約サーキットの組 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の個数 n が曲面の位相不変量であることをジョルダンは証明している．

リスティングは連結性を３次元ユークリッド (Euclid) 空間の中で調べているが，ベッチ (Betti) は一般次元の場合に拡張して考えた．最終的に連結性の概念を厳密に基礎づけたのはポアンカレ (Poincaré) である．１８９５年の一連の論文「Analysis situs 」で,「ホモロジー」の概念を導入し，空間の「ベッチ数」を，ベッチ自身が与えたものよりも明解に定義した．そして，ポアンカレは，オイラーの公式を，一般の枠組みに拡張することができた (**オイラー・ポアンカレ標数**の誕生).

同じく１８９５年の論文で，ポアンカレは「基本群」と「ホモトピー」の概念を導入している．

トポロジーが発展した第２の流れは,「収束」の概念の拡張から生じた．１８１７年，ボルツァノ (Bolzano) は，収束の概念を実数列の収束にこだわらず，数直線内の無限集合に関して考察した．

１８７２年にカントール (Cantor) は,「第１導来集合」あるいは「極限点集合」の概念を導入し，実直線の「閉集合」を，その第１導来集合を含むような集合として定義した．カントールは，もう一つの基本概念である「開集合」も定義した．

ワイヤシュトラス (Weierstrass) は１８７７年に講義録の中でボルツァノ・ワイヤシュトラスの定理の厳密な証明を与えている：

数直線上の有界無限集合 S は，少なくとも１つの集積点 p をもつ．すなわち，S の無限点列 a_n で，$|p - a_n| < \dfrac{1}{n}$ を満たすものが存在する．

こうして,「近傍」の概念が導入された．ヒルベルト (Hilbert) は，１９０２年に，近傍の概念を使って，連続群 (位相群) に関して研究した．

5　空間曲線・曲面のトポロジーと微分幾何と特異点論

6　トポロジーの本

—トポロジーとは？

● 川久保勝夫 著「トポロジーの発想」ブルーバックス B1076 講談社．ISBN 4-06-257076-9
トポロジーの考え方を知るのに最適な啓蒙書．

● 本間龍雄 編「新しいトポロジー」ブルーバックス B214 講談社．ISBN 4-06-117814-8
現在品切れ．安野光雅氏による表紙．

● 永田雅宜 監訳，足立正久，小島誠訳「幾何学からトポロジーへ」紀伊国屋書店．
現在絶版．

● 本間龍雄・岡部恒治 著「微分幾何とトポロジー入門」基礎数学叢書６，新曜社．ISBN 4-7885-0900-6
基本的な話題を手際良く解説.

—トポロジー入門

● 松本幸夫 著「トポロジー入門」岩波書店．ISBN 4-00-005729-4
トポロジー (位相幾何学) の標準的な教科書.

● 小島定吉 著「トポロジー入門」２１世紀の数学７，共立出版．ISBN 4-320-01559-2
トポロジー (位相幾何学) の標準的な教科書.

● 田村一郎 著「トポロジー」岩波全書，岩波書店．ISBN 4-00-021413-6
３角形分割やホモロジーに詳しい.

● 河田敬義 編「位相幾何学」現代数学演習叢書２，岩波書店．ISBN 4-00-005149-0
古いが，よい演習書.

● C. Kosniowski, A first course in algebraic topology, Cambridge Univ. Press.1980. ISBN 0-521-29864-4
トポロジー (位相幾何学) の標準的な教科書.

—結び目理論

● 鈴木晋一 著「結び目理論入門」サイエンス社．ISBN 4-7819-0633-8
結び目理論の比較的わかりやすい入門書.

● L.H. カウフマン著，鈴木晋一・河内明夫 監訳「結び目の数学と物理」培風館．ISBN 4-563-00237-2
おもしろい話題が豊富.
L.H. Kauffman, Knots and physics. Third edition. Series on Knots and Everything, 1. World Scientific ISBN: 981-02-4112-7

● 河内明夫 編著「結び目理論」シュプリンガー・フェアラーク東京　ISBN 4-431-70571-6
結び目理論の概観を得るのに最適な専門書.

—特異点と微分幾何

● 梅原雅顕，山田光太郎 著「曲線と曲面」裳華房．ISBN 4785315318
新しい微分幾何の教科書.
トポロジーは微分幾何学 (曲率など) の知識があると，より活用できる.

● 泉屋周一・佐野貴志 著「幾何学と特異点」特異点の数理１，共立出版．ISBN 4-320-01670-x
幾何学にあらわれる特異点を解析する基本的な方法の概説．生体異常の可視化に活用できるのでは？

● 泉屋周一・石川剛郎 著「応用特異点論」共立出版．ISBN 4-320-01594-0
特異点論の応用に関する専門書.

● V.I. Arnold, Catastrophe theory. Third edition. Springer-Verlag, Berlin, 1992. ISBN: 3-540-54811-4
カタストロフ理論に関する良い概説.

● T. Poston, I. Stewart, Catastrophe theory and its applications. ISBN: 0-486-69271-X
カタストロフ理論の応用に詳しい.

● J.F. Nye, Natural Focusing and Fine Structure of Light, Caustics and Wave Dislocations. Institute of Physics Publishing, 1999. ISBN 0-7503-0610-6
特異点論，カタストロフ理論の光学への応用.

—トポロジーと物理

● 倉辻比呂志 著「トポロジーと物理」パリティ物理学コース，丸善．ISBN 4-621-04045-6

● Giuseppe Morandi, The Role of Topology in Classical and Quantum Physics, Lecture Notes in Physics, m7, Springer-Verlag (1992). ISBN 3-540-55088-7

以上私 (石川) が知っている本を無作為に挙げてみました．他にも良書はたくさんあると思います．(18 Aug. 2004)