幾何学２（トポロジー入門），幾何学講究２ (２００６年度１学期)

担当 石川 剛郎 (いしかわ・ごうお，北海道大学理学研究院数学部門)

目次．

● −1．この講義の成績評価方法．

教科書
◎クゼ・コスニオフスキ著，加藤十吉編訳「トポロジー入門」東京大学出版会．

参考文献
(授業で直接的には使う予定はありませんが，講義内容の参考，あるいは発展的な内容について参考にするとよいでしょう)：
◎松本幸夫著「トポロジー入門」岩波書店．(特に４，５，６章)．
◎徳永，島田，石川，齋藤著「代数曲線と特異点」特異点の数理４，共立出版，(第１章 1.1〜1.3，第２章 2.1〜2.4，第３章 3.1〜3.4)．

講義の進め方
第１回は講義のオリエンテーションをしますが，２回目以降は，授業の最初に５分程**小テスト**（前回の講義の簡単な復習問題）を行います．その後，ほぼ**このプリントに沿って**講義を進めていきます．
講義内容の順序は，教科書の通りではありませんが，講義内容に該当する教科書の箇所を適宜指示しながら，(いま，教科書のココを説明しているよ，と確認しながら) 講義を進めていきます．
ほぼ毎回，講義内容と関係する**レポート問題**を出すので，締め切りに遅れないように提出してください．
講義内容・レポート問題等に関する理解を深めてもらうために，TA に協力してもらって，**オフィス・アワー** を設定します．

月曜-4 限 (14:45〜16:15) 3-401(修士院生室) M2 北山義大

活用してください．
数回，授業の最後に，**質問書**を書いて提出してもらいます．これも評価の対象になるので，よく考えて良い質問を書いてください．
５月末と最後の授業時間（夏休み前．７月後半予定）に**２回のテスト**（８５分）を実施します．必ず受験してください．

評価の仕方
講義の単位に関しては，おおよそ，テスト：平常点（レポート＋小テスト＋質問書） $= 2:1$ の割合で重みを付けて成績を付けます．
講究の単位に関しては，平常点：テスト $= 2:1$ の割合で重みを付けて成績を付けます．
講義内容が十分理解できているかどうか，好奇心を持って積極的に授業に参加していたかどうかを評価します．

● ０．講義の目標．

図形を調べる；代数的な不変量から図形を調べる．

空間 (図形，位相空間) $\longrightarrow$ **基本群** **同相** (位相同形)，あるいは，**ホモトピー同値** $\}$ $\longrightarrow$ **基本群の同型** 空間の分割・合併 $\longrightarrow$ 基本群の分解・融合

予告編：位相空間．基本群．群．閉曲面．閉曲面の基本群．

● １．基本的な図形．

$\mathbf{R}$ 実数全体．距離 $d(x, x') = \lvert x - x'\rvert$． $[a, b] := \{a \leq x \leq b\}$:閉区間．

$\mathbf{R}^2 := \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$．点 $P(x_1, x_2), Q(x_1', x_2')$ 距離 $d(P, Q) := \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}$．

$U \subseteq \mathbf{R}^2$ が開集合 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall P \in U, \exists \varepsilon > 0, \forall Q \in \mathbf{R}^2; d(P, Q) < \varepsilon$ ならば $Q \in U$．

n 次元デカルト (Cartesian) 空間 (ユークリッド (Euclid) 空間)：$\mathbf{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, (1 \leqq i \leqq n)\}$． $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \lVert x\rVert := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$． 距離 $d(x, x') = \lVert x - x'\rVert$．

開集合の概念が上と同じように定式化される．この開集合の定義は，位相空間の公理をみたす．

n 次元**閉円板** (closed disk, 閉球体, closed ball)： $D^n := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \lVert x\rVert \leqq 1\}$．

n 次元**開円板** (open disk, 開球体, open ball)： $\overset{\circ}{D^n} := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \lVert x\rVert < 1\}$．

$(n-1)$ 次元**球面** (sphere)：$S^{n-1} := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \lVert x\rVert = 1\}$．$S^1$: 円周，$S^2$: 球面，$S^3$: 3 次元球面．

単位区間 (unit interval, ゼロイチ区間) $I = [0,1] := \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$.
n 次元**立方体** (cube)：$I^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leqq x_i \leqq 1, (1 \leqq i \leqq n)\}$.

誘導位相を入れて位相空間とみる.（集合に位相を入れる $\Leftrightarrow$ 開集合系を定める）
問１． $S^1, D^2, I^2, S^2, D^3, I^3$ をそれぞれ図示せよ．
練習問題１． $x \in \mathbf{R}^n, \varepsilon > 0$ に対し，$B_\varepsilon(x) = \{x' \in \mathbf{R}^n \mid d(x,x') < \varepsilon\}$ は開集合であることを示せ.
A を集合としたとき，$d : A \times A \to \mathbf{R}$ が A 上の**距離関数**（あるいは**距離**）$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall a,b,c \in A$; $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ and $d(a,b) + d(a,c) \geq d(b,c)$.
このとき (A,d) を距離空間という．
練習問題２． d が A 上の距離ならば，$d(a,b) \geq 0$ であり，$d(a,b) = d(b,a)$ が成り立つことを示せ.
(A,d) を距離空間とする．$U \subseteq A$ が (A,d) の開集合 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in U, \exists \varepsilon_x > 0$; $y \in A$ かつ $d(x,y) < \varepsilon_x$ ならば $y \in U$.
練習問題３． (A,d) を距離空間とする．$\mathcal{U}$ を (A,d) の開集合の全体からなる集合族とする．このとき次を示せ：(i) 空集合 $\emptyset$ と A は $\mathcal{U}$ に属する．(ii) $\mathcal{U}$ に属する２つの要素の共通部分は $\mathcal{U}$ に属する．(iii) $\mathcal{U}$ のかってな部分族の和集合は $\mathcal{U}$ に属する．

距離空間 $\Longrightarrow$ 位相空間

練習問題４． $\mathbf{R}$（通常の距離をもつ）の開集合の無限個の集まりで，その共通部分が開集合でないような例を与えよ．

● ２． 位相空間．(pp.12–17)

集合 X が位相空間 $\Longleftrightarrow$ X の部分集合の一つ一つが "X の開集合である"か "X の開集合でない"かが，いちいち明確に決められている．(決める手続きが与えられている)．

ただし，次のことが最低限要求される (開集合の決めかたの条件，**開集合系の条件**)：
X の開集合たちの**有限個の共通部分**も X の開集合である．
X の開集合たちの**和集合** (無限個の和集合であってもよい) も X の開集合である．
X 自身と $\emptyset \subseteq X$ は X の開集合である．

$\mathcal{U}_X := \{U \mid U \subseteq X$ は X の開集合 $\}$ ($\subseteq \mathcal{P}_X := \{S \mid S \subseteq X$ は X の部分集合 $\}$)

と書くことがある．$\mathcal{U}_X$ は，X の開集合たちの集合である．位相空間 X の**開集合系**あるいは**位相** (topology) あるいは**位相構造** (topological structure) とよばれる．

開集合系が初めに与えられた場合,「**閉集合** $\Leftrightarrow$ その補集合が開集合」と定義される．

注：場合によっては，開集合系の代わりに**閉集合系**を指定することがある．**閉集合系の条件**は次で与えられる：
X の閉集合たちの**有限個の和集合**も X の閉集合である．
X の閉集合たちの**共通部分** (無限個の共通部分であってもよい) も X の閉集合である．
X 自身と $\emptyset \subseteq X$ は X の閉集合である．

写像 $f : X \to Y$ が連続 (continuous) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} Y$ の任意の開集合 U に対して，U の f による逆像 $f^{-1}(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ が X の開集合.

● ３． 基本的な図形の位相.

$\mathbf{R}^n$ の開集合系.

$U \subseteq \mathbf{R}^n$ が $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$「$\forall a \in U, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbf{R}^n, (\|x - a\| < \varepsilon \Rightarrow x \in U)$」

問２． この $\mathbf{R}^n$ の開集合の決め方が開集合系の条件を満たすことを確かめよ.
問３． $\overset{\circ}{D^n} \subset \mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合であることを示せ.
問４． $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合であることを示せ.
問５． A 君は,「開集合でなければ閉集合だ」と言っている．彼は正しいか？

$\mathbf{R}^n$ の部分集合 A の開集合系 (**誘導位相**．**相対位相**とも言う).

$V \subseteq A$ が X の開集合 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$「$\mathbf{R}^n$ のある開集合 U があって，$V = U \cap A$ と表される.」

問６． $\mathcal{U}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{U}_{\mathbf{R}^n}\}$ が開集合系の条件を満たすことを示せ.

※ 位相空間 $(X, \mathcal{U}_X)$ の部分集合 A の開集合系 (**誘導位相** (**相対位相**)).

$\mathcal{U}_A := \{V \subseteq A \mid \exists U \in \mathcal{U}_X, V = U \cap A\}$.

相対位相を入れた部分集合を**部分空間**とよぶ.

問７． $(X, \mathcal{U}_X)$ が一般の位相空間の場合に，$\mathcal{U}_A$ が開集合系の条件を満たすことを示せ.

注:「開集合である」とか「閉集合である」という場合は，誤解のないように「D^3 の開集合である」とか「S^2 の開集合である」という具合に，**何処で考えているかを必ず明示しなければならない**.
問８． $\overset{\circ}{D^1}$ と $\mathbf{R}^1$ が同相であることを示せ．$\overset{\circ}{D^2}$ と $\mathbf{R}^2$ が同相であることを示せ．$\overset{\circ}{D^n}$ と $\mathbf{R}^n$ が同相であることを示せ.

同相である $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ **同相写像** (両連続な全単射) が存在する．(p.20)

問９． D^1 と $I^1 = I$ が同相であることを示せ．D^2 と I^2 が同相であることを示せ.

● ４．商空間の位相．(pp. 29–40)

4.1 商集合 (剰余集合，等化集合) ：
X を集合，$\sim$ を X 上の同値関係とする.
このときの同値類の全体の集合を X の $\sim$ に関する**商集**

合 (あるいは**剰余集合，等化集合**など) と呼ぶ．
商集合を記号 $X/\sim$ などで表す．（"割り算" からのアナロジーか）．
従って，商集合 $X/\sim$ の要素１つ１つは，ある $x \in X$ の属する同値類であることに注目しよう．$x \in X$ の属する同値類を，たとえば，記号 $[x]$ で表す．$[x] \in X/\sim$ である．

全射 $\pi : X \to X/\sim$ が $\pi(x) := [x]$ で定まる (**商写像**)．
逆に，X からある集合 Z への全射 $\varphi : X \to Z$ があれば，X 上の同値関係が定まり，その商集合と Z との間に全単射が φ から導かれる．

例：$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$．これは，$\mathbf{R}$ 上の同値関係 $\sim$ を $x \sim x' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x - x' \in \mathbf{Z}$ で定義したときの同値類の集合 $\mathbf{R}/\sim$ のことである．$e : \mathbf{R} \to S^1 \subset \mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ を，$e(x) := exp(2\pi x)$ により定めると，写像 e は $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ と S^1 の間の全単射を導く．

4.2 商位相の定義：
X を集合，$\sim$ を X 上の同値関係とする．X に位相が入っているとき (つまり，X の開集合系 $\mathcal{U}_X$ が指定されているとき)，商集合 $X/\sim$ にも位相 (**商位相**) が導かれる：$\pi : X \to X/\sim$ を自然な全射とするとき，

> 「$U \subseteq X/\sim$ が $X/\sim$ の開集合」$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$「$\pi^{-1}(U) \subseteq X$ が X の開集合」

$\pi^{-1}(U)$ は，U の π による逆像：$\pi^{-1}(U) := \{x \in X \mid \pi(x) \in U\}$．
商位相を付与した商集合を**商空間** (**剰余空間**, **等化空間**) と呼ぶ．

X, Z を集合，$\varphi : X \to Z$ を全射とする．X に位相が入っているとき，X から φ によって導かれた Z 上の**商位相** が次で定まる：「$U \subseteq Z$ が Z の開集合」$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$「$\varphi^{-1}(U) \subseteq X$ が X の開集合」(p.29)

問１０． $(X, \mathcal{U}_X)$ を位相空間，$\varphi : X \to Z$ を全射とする．このとき，$\mathcal{U}_Z := \{U \subseteq Z \mid \varphi^{-1}(U) \in \mathcal{U}_X\}$ が開集合系の条件をみたすことを確かめよ．
問１１． 写像 $\varphi : X \to Z$ は，(X の位相と，Z の商位相に関して) 連続であることを示せ．

> 写像 $f : X \to Y$ が連続 (continuous) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} Y$ の任意の開集合 U に対して，U の f による逆像 $f^{-1}(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ が X の開集合．

問１２． X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を連続写像とする．このとき，X がコンパクトならば，$f(X) \subseteq Y$ もコンパクトであることを示せ．

> 位相空間 X がコンパクト (compact) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} X$ の開被覆（かいひふく）$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (つまり，$U_\lambda \in \mathcal{U}_X, X = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$) に対し，有限個の $U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_r}$ があって，すでに $X = U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_r}$．

問１３． $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$．これは，$\mathbf{R}$ 上の同値関係 $\sim$ を $x \sim x' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x - x' \in \mathbf{Z}$ で定義したときの同値類の集合 $\mathbf{R}/\sim$ のことである．$\mathbf{R}$ の位相から $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ に商位相を入れたとき，$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ がコンパクトであることを示せ．(ヒント：$I = [0, 1]$ について $\pi(I) = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ である)．
問１４． $e : \mathbf{R} \to S^1 \subset \mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ を，$e(x) := exp(2\pi x)$ により定めると，写像 e は 全単射である連続写像 $\overline{e} : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to S^1$ を定めることを示せ．

問１５． X がハウスドルフな位相空間，$A \subseteq X$ が (誘導位相に関して) コンパクト部分集合ならば，A は X の閉集合であることを示せ．
練習問題５． 位相空間 X, Y および連続な全単射 $f : X \to Y$ で f^{-1} が連続とならない例を与えよ．
練習問題６． 開区間 $(-1, 1)$ と $\mathbf{R}$ は同相であることを示せ．
練習問題７． 区間 $(1, \infty)$ と区間 $(0, 1)$ は同相であることを示せ．
練習問題８． $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ を単位球面とし，$\boldsymbol{n} = (0, 0, \dots, 0, 1) \in S^n$ とおく．このとき，$S^n \setminus \{\boldsymbol{n}\}$ は $\mathbf{R}^n$ と同相であることを示せ．(ヒント：$\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し，$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{x}$ を結んでできる直線と $\mathbf{R}^n = \{x_{n+1} = 0\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ の交点を対応させよ.)
練習問題９． $p + q \leq n$ に対し，

$$S_{p,q} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 = 1\}$$

が $S^{p-1} \times \mathbf{R}^{n-q}$ に同相であることを示せ．(ヒント：$f : S^{p-1} \times \mathbf{R}^{n-q} \to S_{p,q}$ を

$$f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_{n-q}) = (x_1 z, x_2 z, \dots, x_p z, y_1, \dots, y_{n-q})$$

ただし，$z = \sqrt{1 + y_1^2 + \dots + y_q^2}$，と定めるとき，$f$ が同相写像であることを示せ.)
練習問題１０． $\mathbf{R}P^1$ を S^1 から $(x_1, x_2) \sim (x_1', x_2') \Leftrightarrow (x_1', x_2') = \pm(x_1, x_2)$ という同値関係で得られる商空間とする．このとき，$\mathbf{R}P^1$ は S^1 と同相であることを示せ．
練習問題１１． X, Y と位相空間とし，$f : X \to Y$ を連続写像とする．このとき，$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ と X は同相であることを示せ．
練習問題１２． $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ は $\mathbf{R} \times S^1$ と同相であることを示せ．
練習問題１３． $\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合は有界であることを示せ．

> 位相空間 X の部分集合 A がコンパクト集合 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} A$ の X における任意の開被覆 $\{U_\lambda\}$，$A \subseteq \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ に対し，有限個の $U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_r}$ があって，すでに $A \subseteq U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_r} \Leftrightarrow A$ が X からの誘導位相に関してコンパクト空間．

練習問題１４． 位相空間 X がハウスドルフであるための必要十分条件は，$\Delta_X := \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ が $X \times X$ の閉集合である，ことを示せ．

● ５． 曲面の工作

X を位相空間，$A, B \subseteq X$ を部分空間，$\varphi : A \to B$ を同相写像とする．

> **X から A と B を貼り合わせて得られる空間** X/φ とは，X 上の同値関係 $\sim$ を「$p \sim q \Leftrightarrow p = q$，または，$p \in A$ であって $q = \varphi(p)$，または，$p \in B$ であって $q = \varphi^{-1}(p)$」と定めたときの商空間 $X/\sim$ のことである．

X, Y を位相空間，$A \subseteq X, B \subseteq Y$ をそれぞれの部分空間とし，$\varphi : A \to B$ を同相写像とする．

> **X と Y を $\varphi : A \to B$ で貼り合わせて得られる空間** $X \cup_\varphi Y$ とは，$X \cup Y$ (disjoint union) 上の同値関係 $\sim$ を「$p \sim q \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} p = q$，または，$p \in A$ であって $q = \varphi(p)$，または，$p \in B$ であって $q = \varphi^{-1}(p)$」と定めたときの商空間 $(X \cup Y)/\sim$ のことである．

問１６． 正方形 $I^2 = I \times I, (I = [0,1])$ の２辺を貼り合わせて円筒 (シリンダー，$S^1 \times I$ と同相な図形) を作る操作を考察せよ．
問１７． 正方形 $I^2 = I \times I, (I = [0,1])$ の２辺を貼り合わせてメビウス (Möbius) の帯を作る操作を考察せよ．
問１８． 円筒 $S^1 \times I$ からトーラス T^2 ($S^1 \times S^1$ と同相な図形) を作る操作を考察せよ．

（実射影平面）$\mathbf{R}P^2 := S^2/\sim$．ただし，$x, x' \in S^2$ について $x \sim x' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x = x'$ または $x = -x'$．
$\mathbf{R}P^2$ を簡単に P^2 と表すこともある．

問１９． 実射影平面 $\mathbf{R}P^2$ がコンパクト・ハウスドルフ空間であることを示せ．
問２０． $X := D^2/\equiv$ ただし，$x \equiv x' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x = x'$ または，$x, x' \in S^1$ かつ $x = -x'$，とおくとき，$\mathbf{R}P^2$ と X が同相であることを示せ．
練習問題１５． $Y := (\mathbf{R}^3 \setminus \{0\})/\approx$ ただし，$x, x' \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ に対して，$x \approx x' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$(ある $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ があって，$x = cx'$)，とおくとき，$\mathbf{R}P^2$ と Y が同相であることを示せ．
問２１． メビウスの帯の境界部分 (S^1 と同相) と閉円板 (D^2 と同相な図形) の境界部分 (S^1 と同相) を貼り合わせて射影平面 $\mathbf{R}P^2$ と同相な図形を作る操作を考察せよ．

● ６．閉曲面の位相的分類．

6.1 閉曲面．

２次元コンパクト連結位相多様体のことを簡単に**閉曲面**とよぶ．(p.84)

n 次元**位相多様体**：ハウスドルフ (Hausdorff) 空間であって，局所的に $\mathbf{R}^n$ と同相な位相空間．
つまり，位相空間 M が n 次元位相多様体 であるとは，Hausdorff 性$\forall p, q \in M, (p \neq q), \exists U, V$，$U$ は p の開近傍，V は q の開近傍，$U \cap V = \emptyset$，
局所ユークリッド性$\forall p \in M\ \exists W$, W は p の開近傍，$\exists \Omega$, Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合，$\exists \varphi : W \to \Omega$, φ は同相写像．(p.73)

6.2 閉曲面の位相的分類 (p.86)．
● “向き付け可能” な閉曲面．

$S^2, T^2, T^2\#T^2, T^2\#T^2\#T^2 = \#_3T^2, \ldots, \#_gT^2, \ldots$

$\#$ は**連結和**という操作である．(講義で説明する)．
$S^2 = \#_0T^2$ とみなすと，考えやすい．
問２２． $T^2, T^2\#T^2, T^2\#T^2\#T^2 = \#_3T^2$ を図示せよ．
● “向き付け不可能” な閉曲面．

$\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2, \ldots, \#_g\mathbf{R}P^2, \ldots$

これらの分類は，閉曲面たちを「同相である」という同値関係で分類したもの．

6.3 よく知られた位相不変量（紹介のみ）．
種数 (ジーナス，genus) g：
曲面 $\#_gT^2$ や $\#_g\mathbf{R}P^2$ に対し，数 g をその種数とよぶ．
S^2 は種数 0. T^2 は種数 1. $\mathbf{R}P^2$ は種数 1.

オイラー標数 (Euler characteristic, Euler number)
$\chi(S^2) = 2, \chi(\#_gT^2) = 2 - 2g.\quad \chi(\#_g\mathbf{R}P^2) = 2 - g.$
(χ は「カイ」と読む)．
注：S^2 は $\mathbf{R}P^2$ の２重被覆．T^2 は $\mathbf{R}P^2\#\mathbf{R}P^2$ の２重被覆．$\#_{g-1}T^2$ は $\#_g\mathbf{R}P^2$ の２重被覆．このとき，
$\chi(\#_{g-1}T^2) = 2 - 2(g-1) = 2(2-g) = 2(\chi(\#_g\mathbf{R}P^2))$.

● ７．位相空間の道．(p.98)

X を位相空間とする．閉区間 $I = [0,1]$ から X への連続写像 $\ell : I \to X$ のことを X 上の**道** (path, あるいは弧, arc) と呼ぶ．$\ell(0) = p, \ell(1) = q$ のとき ℓ は p と q を結ぶ道と言い，p は ℓ の**始点**，q は ℓ の**終点**，であると言う．
例：$X = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$．$\ell : I \to X$, $\ell(t) := (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$, は $p = (1,0)$ と $q = (-1,0)$ を結ぶ道．
「$\ell : I \to X$ が連続写像」$\Leftrightarrow$「$\forall U : X$ の開集合に対し，$\ell^{-1}(U)$ が I の開集合」$\Leftrightarrow$「$\forall t_0 \in I, \forall U$, $\ell(t_0)$ の開近傍に対し，$\exists \varepsilon > 0$ があって，$t \in I, |t - t_0| < \varepsilon \Rightarrow \ell(t) \in U$．」
$I = [0,1]$ の代わりに $[a,b]$ としても以下の理論は同じだが，$[0,1]$ で統一する．(道のパラメータの基準化)．

位相空間 X が**弧状連結**（あるいは **道連結**）であるとは，任意の $p, q \in X$ に対し，p と q を結ぶ道が存在するときにいう．($\exists \ell : I \to X$ path $\ell(0) = p, \ell(1) = q$)．

問２３． $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ は弧状連結であることを示せ．
位相空間 X 上に同値関係 $\sim$ を，$p, q \in X$ について，$p \sim q \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} p$ と q を結ぶ道が存在する，と定義する．
問２４． 上の $\sim$ は同値関係であることを示せ．
この同値関係 $\sim$ の同値類を X の道連結成分（または弧状連結成分）という．道連結成分の集合，つまり，$X/\sim$ を $\pi_0(X)$ と記す．

● ８．道の変形．(p.126)

8.1 道の変形

$\ell : I \to X, \ell' : I \to X$ を始点と終点が同じ道とする．$\ell(0) = p = \ell'(0), \ell(1) = q = \ell'(1)$．このとき，連続写像 $H : I \times I \to X$ が ℓ **から** ℓ' **へのホモトピー** (homotopy) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} H(t,s)$ $0 \leqq t \leqq 1, 0 \leqq s \leqq 1$ について，
$H(t,0) = \ell(t), (0 \leqq t \leqq 1)$, $H(t,1) = \ell'(t), (0 \leqq t \leqq 1)$,
$H(0,s) = p, 0 \leqq s \leqq 1$, $H(1,s) = q, 0 \leqq s \leqq 1$.

注：t は道のパラメータ，s は変形のパラメータ．
注：ホモトピーは**道の始点と終点を止めた** (X **の中での**) **連続変形**を与える．
例：$X = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$．$\ell, \ell' : I \to X$, $\ell(t) := (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$, $\ell'(t) := (\cos(\pi t), \frac{1}{2}\sin(\pi t))$．$H : I \times I \to X$, $H(t,s) := \cos(\pi t), (1 - \frac{t}{2})\sin(\pi t))$ とおくと，H は ℓ から ℓ' へのホモトピーである．

ℓ から ℓ' へのホモトピーが存在するとき，ℓ と ℓ' は (始点と終点を止めて) **ホモトープ** (homotope) あるいは**ホモトピック** (homotopic) であると言い，$\ell \simeq \ell'$ と書く．

ホモトープという関係は同値関係である：
$\ell \simeq \ell$
$\ell \simeq \ell' \Rightarrow \ell' \simeq \ell$
$(\ell \simeq \ell'$ かつ $\ell' \simeq \ell'') \Rightarrow \ell \simeq \ell''$.
問２５． このことを証明せよ．

8.2 道の積 (p.126)
$\ell : I \to X$ を p と q を結ぶ道，$m : I \to X$ を q と r を結ぶ道とする．(ℓ の終点と m の始点が一致).

ℓ と m の積 $\ell \cdot m : I \to X$ が
$(\ell \cdot m)(t) := \ell(2t), (0 \leqq t \leqq \frac{1}{2})$,
$(\ell \cdot m)(t) := \ell(2t-1), (\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1)$. で定まる．

道の積は，いわば「駅伝」である．

ホモトープな道の積はホモトープ：
$(\ell \simeq \ell'$ かつ $m \simeq m') \Rightarrow \ell \cdot m \simeq \ell' \cdot m'$.

道の積の結合法則　$(\ell \cdot m) \cdot n \simeq \ell \cdot (m \cdot n)$.

練習問題１６． 道の積の結合法則を示せ.（ヒント：ホモトピー

$$H(t,s) = \begin{cases} \ell\left(\frac{4t}{1+s}\right), & 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ m(4t-(1+s)), & \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ n\left(\frac{4t-(2+s)}{2-s}\right), & \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

を考えよ.）

8.3 逆の道 (p.129)
X 上の道 $\ell : I \to X$ に対し，ℓ の**逆**を $\ell^{-1}(t) := \ell(1-t), (0 \leqq t \leqq 1)$ で定める．$\ell^{-1} : I \to X$.
ℓ の始点は ℓ^{-1} の終点，ℓ の終点は ℓ^{-1} の始点.

$\ell \cdot \ell^{-1} \simeq \tilde{p},\ \ell^{-1} \cdot \ell \simeq \tilde{q}$
$p = \ell(0)$. $\tilde{p} : I \to X$ は定値写像 $\tilde{p}(t) = p$.
$q = \ell(1)$. $\tilde{q} : I \to X$ は定値写像 $\tilde{q}(t) = q$.

問２６． X, Y を位相空間, A, B を X の閉集合, $X = A \cup B$ とする．写像 $H : X \to Y$ があり，制限 $H|_A : A \to Y$ と $H|_B : B \to Y$ が共に連続ならば，H も連続であることを示せ.
問２７． $\ell \cdot \ell^{-1} \simeq \tilde{p}$ を確かめよ．

8.4 閉じた道
道 $\ell : I \to X$ について終点が始点に一致する ($\ell(0) = \ell(1)$) とき，ℓ を閉じた道 (closed path, 閉道，ループ, loop) と呼ぶ．$p_0 = \ell(0) = \ell(1)$ を基点 (base point) と呼ぶ.
さて，$p_0 \in X$ に対して，
$\Omega(X, p_0) := \{\ell : I \to X \mid \ell$は閉じた道 $\ell(0) = \ell(1) = p_0\}$
とおく．
$\simeq$ (ホモトープという関係) は $\Omega(X, p_0)$ 上の同値関係.
(4.1 参照).

$\ell, \ell', m, m', n \in \Omega(X, p_0)$ のとき，
$(\ell \simeq \ell'$ かつ $m \simeq m') \Rightarrow \ell \cdot m \simeq \ell' \cdot m'$.
$(\ell \cdot m) \cdot n \simeq \ell \cdot (m \cdot n)$.
$\ell \cdot \tilde{p_0} \simeq \ell, \tilde{p_0} \cdot \ell \simeq \ell$.
$\ell \cdot \ell^{-1} \simeq \tilde{p_0}, \ell^{-1} \cdot \ell \simeq \tilde{p_0}$.

そこで，$\pi_1(X, p_0) := \Omega(X, p_0)/\simeq$ とおき，p_0 を基点とする X の**基本群** (fundamental group) とよぶ.
問２８． $\ell \cdot \tilde{p_0} \simeq \ell$ を確かめよ．

● ９．群の概念と図形の基本群

9.1 群
集合 G に 2 項演算 $\cdot, (g_1, g_2 \in G, g_1 \cdot g_2 \in G)$ が定まっていて，次の 3 条件をみたすとき，G を**群** (group) とよぶ：

(i) G の中に特別な要素 e が存在して，$\forall g \in G, g \cdot e = g, e \cdot g = g$ が成り立つ．(e を G の**単位元** (unit element) とよぶ).
(ii) G の各要素 g を決めるたびに，$g \cdot g' = e, g' \cdot g = e$ となる $g' \in G$ が存在する．(このような g' を g の**逆元**とよび，通常 g^{-1} と書く).
(iii) G の任意の 3 要素 g, h, k に対し，$(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$ が成り立つ．(結合法則).

例：$G = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. 通常の乗法．$e = 1$
例:$G = \mathbf{R}$. 通常の加法．単位元 $e = 0$, 逆元 "a^{-1}" $= -a$.
例：$G = \mathbf{Z}$．通常の加法.
例：$G = S^1 := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$．複素数の積．単位元 1.
例：$G = \mathrm{GL}(2, \mathbf{R}) := \{A \mid A$ は実 2 次正則行列 $\}$．行列の積．単位元 $I_2(= E_2)$ 単位行列．逆元は逆行列.
例：$G = \{e\}$．**自明群**.
例：$G = S_n := (\{1, 2, \ldots, n\}$ の全単射全体の集合)．積は写像の合成．単位元は id 恒等写像．逆元は逆写像．n **次対称群** (**置換群**).
例：$G = \{\pm 1\}$ は乗法に関して群.
群 G が**可換群** (**アーベル群**，**加群**) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall g, h \in G, g \cdot h = h \cdot g$.
例：$\mathbf{R} \setminus \{0\}, \mathbf{R}, \mathbf{Z}, S^1, \{e\}, \{\pm 1\}$ は可換群．$G = \mathrm{GL}(2, \mathbf{R}), S_n (n \geqq 3)$ は可換群でない．(非可換群).

問２９． $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R}), S_3$ が非可換であることを示せ．

9.2 群の準同型と同型
G, H を群，$\varphi : G \to H$ を写像とする．
φ が**準同型写像** (略して**準同型**, homomorphism) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall g_1, g_2 \in G, \varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$.
(左の $\cdot$ は G での積，右の $\cdot$ は H での積).
このとき，$\varphi(e) = e$, $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ が成立.
例：$\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$ を $\varphi(x) := e^x$ で定義すると φ は準同型写像．(この e は自然対数の底．単位元とは無関係).
例：$\varphi : \mathbf{R} \to S^1 (\subset \mathbf{C})$ を $\varphi(x) := e^{ix}$ で定義すると φ は準同型写像.
例：$\varphi : \mathrm{GL}(2, \mathbf{R}) \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$ を $\varphi(A) := \det(A)$ で定義すると φ は準同型写像.
例：$\varphi : S_n \to \{\pm 1\}$ を $\varphi(\sigma) := \mathrm{sign}(\sigma)$ (σ の符号．偶置換なら $+1$, 奇置換なら -1) で定義すると φ は準同型写像.

準同型写像 $\varphi : G \to H$ が**同型写像** (略して**同型**, isomorphism) $\overset{\text{def.}}{\iff} \varphi$ が全単射であり，逆写像 $\varphi^{-1} : H \to G$ も準同型写像 $\Leftrightarrow \varphi$ が全単射.
準同型写像が全単射なら, 逆写像は自動的に準同型となる.
群 G と群 H が**同型** (isomorphic) $\overset{\text{def.}}{\iff}$ ある同型写像 $\varphi : G \to H$ が存在する.
G と H が同型のとき，$G \cong H$ と書く.
例：$\mathbf{R}_+ := \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ は普通の乗法について群.
$\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ を $\varphi(x) := e^x$ で定義すると φ は同型写像.
したがって，$\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}_+$ は同型な群.

$G \cong G$,
$G \cong H \Rightarrow H \cong G$
$G \cong H, H \cong K \Rightarrow G \cong K$.

問３０． このことを示せ.

9.3 部分群と正規部分群
G を群，$H \subseteq G$ を部分集合とする.
H が G の**部分群** (subgroup) $\overset{\text{def.}}{\iff}$(0) 単位元 $e \in H$ (i) $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in H$ (ii) $h \in H \Rightarrow h^{-1}$ (h の G の中での逆元) $\in H$
注：G の部分群はそれ自体で群になる.
例：$\mathbf{R}_+$ は $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ の部分群.
例：$\mathbf{Z}$ は $\mathbf{R}$ の部分群.
例：$m \in \mathbf{Z}$ に対し，$m\mathbf{Z}$ は $\mathbf{Z}$ の部分群.
例：$\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z})$:=($\det(A) = \pm 1$ である整係数 2 次正方行列の全体) は $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ の部分群.
例：$A_n :=$ (S_n の中の偶置換の全体) は S_n の部分群. (n **次交代群**).
G, G' を群，$\varphi : G \to G'$ を準同型写像とする.
$\mathrm{Ker}(\varphi) := \varphi^{-1}(e) := \{g \in G \varphi(g) = e\}$ は G の部分群.
$\mathrm{Im}(\varphi) := \varphi(G) := \{\varphi(g) \mid g \in G\}$ は G' の部分群.
問３１． 準同型写像 $\varphi : G \to G'$ について，φ が単射 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) = \{e\}$ であることと，φ が全射 $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) = G'$ であることを示せ.
G を群，$H \subseteq G$ を部分群とする.
H が G の**正規部分群** (normal subgroup)
$\overset{\text{def.}}{\iff} \forall h \in H, \forall g \in G; g^{-1} \cdot h \cdot g \in H$
$\Leftrightarrow \forall g \in G, g^{-1} \cdot H \cdot g \subseteq H$.
例：$\mathbf{R}_+$ は $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ の正規部分群.
例：$\mathbf{Z}$ は $\mathbf{R}$ の正規部分群.
例：$m \in \mathbf{Z}$ に対し，$m\mathbf{Z}$ は $\mathbf{Z}$ の正規部分群.
例：$A_n := \{\sigma \in S_n \mid \sigma$は偶置換$\}$ は S_n の正規部分群.
例：$\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z})$ は $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ の正規部分群ではない.
問３２． $H_\lambda \subseteq G (\lambda \in \Lambda)$ を群 G の正規部分群の族とするとき，$H := \cap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ も G の正規部分群であることを示せ.

$\varphi : G \to G'$ を準同型写像とすると $\mathrm{Ker}(\varphi)$ は G の正規部分群である.

問３３． このことを示せ.
$\mathrm{Im}(\varphi)$ は G' の正規部分群とは限らない.

9.4 剰余群と群の準同型定理
H が群 G の部分群とする.
G の同値関係 $\sim$ を，$g_1 \sim g_2 \overset{\text{def.}}{\iff}$
$\exists h \in H, g_1 \cdot h = g_2$ ($\Leftrightarrow g_2 \in g_1 H$) で定義する.
$g \in G$ の同値類 $[g]$ は $gH (\subseteq G)$ と表される.

問３４． 上の $\sim$ が G の同値関係であることを確かめよ.
商集合 (剰余集合，等化集合) $G/\sim$ を G/H と表し，G の H による (**右**) **剰余集合**とよび，G/H の各要素を (**右**) **剰余類**とよぶ.
商写像 (剰余写像) は $\pi : G \to G/H$,
$\pi(g) := [g] = gH$ (g の剰余類) で定まる.
H が正規部分群とすると,
$g_1 \sim g_2, g_1' \sim g_2' \Rightarrow g_1 \cdot g_1' \sim g_2 \cdot g_2'$.
そこで，$[g] \cdot [g'] := [g \cdot g'] \in G/H$ で積を定義すると，G/H は群である．このとき，
G/H を G の正規部分群による**剰余群** (residual group, **商群**，quotient group) とよぶ．単位元は $[e]$．$[g]$ の逆元は $[g]^{-1} = [g^{-1}]$ である.
$\pi : G \to G/H$ について，$\mathrm{Ker}(\pi) = H$.
例：$G/G \cong \{e\}$ (自明群と同型).
例：$G/\{e\} \cong G$.
例：$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, $(\mathbf{R} \setminus \{0\})/\mathbf{R}_+$, S_n/A_n.

準同型定理
G, K を群，$\varphi : G \to K$ を準同型写像とすると，群の同型写像 $\overline{\varphi} : G/\mathrm{Ker}(\varphi) \to \mathrm{Im}(\varphi)$ が誘導される.

例：$\mathbf{R}/\mathbf{Z} \cong S^1, (\mathbf{R} \setminus \{0\})/\mathbf{R}_+ \cong \{\pm 1\} \cong S_n/A_n$.
問３５． 上の例の主張を証明せよ.

9.5 基本群
p_0 を基点とする． X の**基本群** (fundamental group) $\pi_1(X, p_0) := \Omega(X, p_0)/\simeq$ は群である.
基本群は可換群になることもあるが，一般には非可換群である.
積は $[\ell] \cdot [\ell'] := [\ell \cdot \ell']$ で定義される.
($\ell \cdot \ell'$ は閉じた道の積).

p_0 と p_1 を結ぶ X 上の道 $m : I \to X$ があれば，群の同型写像 $\varphi : \pi_1(X, p_0) \to \pi_1(X, p_1)$ が，$\varphi([\ell]) := [(m^{-1} \cdot \ell) \cdot m]$ により定まる.
とくに，X が弧状連結ならば，基本群 $\pi_1(X, p_0)$ の群同型類は，基点 p_0 の取り方によらない.

X が弧状連結のときは，基本群を単に $\pi_1(X)$ と書くことができる.

$f : (X, p_0) \to (Y, q_0)$ が連続写像のとき，群の準同型写像 $f_\# : \pi_1(X, p_0) \to \pi_1(Y, q_0)$ が，$f_\#([\ell]) := [f \circ \ell]$ で定義される．(これは f **から誘導された準同型写像**と呼ばれる).

問３６． $f_\#$ が well-defined であることを示せ.

(1) $f : (X, p_0) \to (Y, q_0)$, $g : (Y.q_0) \to (Z, r_0)$ が連続写像のとき，$g_\# \circ f_\# = (g \circ f)_\# : \pi_1(X, p_0) \to \pi_1(Z, r_0)$ が成立する.
(2) $(\mathrm{id}_X)_\# : \pi_1(X, p_0) \to \pi_1(X, p_0)$ は恒等写像 $\mathrm{id}_{\pi_1(X, p_0)}$ である.

問３７． 上の (1), (2) を示せ.

(**基本群の位相不変性**) (X, p_0) と (Y, q_0) が同相ならば，基本群 $\pi_1(X, p_0)$ と $\pi_1(Y, q_0)$ は群同型である．ここで，(X, p_0) と (Y, q_0) が同相とは，連続写像 $f : X \to Y, f(p_0) = q_0$ と連続写像 $g : Y \to X, f(q_0) = p_0$ があって，$g \circ f = \mathrm{id}_X, f \circ g = \mathrm{id}_Y$ が成り立つことである.

問３８． 上を示せ．

9.6 基本的な図形の基本群
(1) $\pi_1(D^n, p_0) \cong \{e\}$ (自明群)．$\pi_1(\mathbf{R}^n, p_0) \cong \{e\}$.
(2) $\pi_1(S^1, p_0) \cong \mathbf{Z}$.
(3) $\pi_1(T^2, p_0) \cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.
(4) $\pi_1(S^2, p_0) \cong \{e\}$.
(5) $\pi_1(\mathbf{R}P^2, p_0) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
注：$D^n, \mathbf{R}^n, S^1, T^2, S^2, \mathbf{R}P^2$ はすべて弧状連結．
問３９． $\pi_1(D^n, p_0) \cong \{e\}$ と $\pi_1(\mathbf{R}^n, p_0) \cong \{e\}$ を示せ．

> **応用．** 連続写像 $f : D^2 \to D^2$ には少なくとも１つの不動点が存在する．

注：連続写像 $f : D^n \to D^n$ には少なくとも１つの不動点が存在する．一般には "π_{n-1}"(ホモトピー群) や "H_n"(ホモロジー群) を使うことになる．

● １０．写像のホモトピー

10.1 直積空間
$(X, \mathcal{U}_X), (J, \mathcal{U}_J)$ を位相空間，$X \times J$ を直積集合とする．$X \times J$ の位相が，
$U \subseteq X \times J$ が $X \times J$ の開集合 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall (x,t) \in U, \exists V \in \mathcal{U}_X, W \in \mathcal{U}_J, x \in V, t \in W, V \times W \subseteq U$
で定義される．この位相を X と J からの**直積位相**という． 直積位相を入れた直積集合を**直積空間**とよぶ．
問４０． $\mathbf{R}^2$ 上の $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}$ からの直積位相と，$\mathbf{R}^2$ 上の通常のユークリッド位相が一致する (開集合系が同じ) ことを示せ．
問４１． 射影 $\pi_X : X \times J \to X$，$\pi_J : X \times J \to J$ は連続写像であることを示せ．
問４２． 各 $t_0 \in J$ について，$i_{t_0} : X \to X \times J$, $i_{t_0}(x) := (x, t_0)$ は連続写像であることを示せ．
問４３． X, Y を位相空間，$p_0 \in X, q_0 \in Y$ とするとき，群同型 $\pi_1(X \times Y, (p_0, q_0)) \cong \pi_1(X, p_0) \times \pi_1(Y, q_0)$ を示せ．

10.2 連続写像のホモトピー
X, Y を位相空間，$f, g : X \to Y$ を連続写像とする．

> f **が** g **にホモトープ** (homotope, homotopic) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 連続写像 $H : X \times I \to Y$ で，$H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$ となるものが存在する．

このとき，$f \simeq g$ と書く．H は f **から** g **へのホモトピー** (homotopy) とよばれる．$f, g, h : X \to Y$ を連続写像とするとき，

> (1) $f \simeq f$, (2) $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$, (3) $f \simeq g, g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$.

問４４． 上を示せ．

> $f, g : X \to Y, f', g' : Y \to Z$ を連続写像とするとき，$f \simeq g, f' \simeq g' \Rightarrow f' \circ f \simeq g' \circ g$.

問４５． 上を示せ．
$A \subseteq X$ を閉集合，ホモトピー $H : X \times I \to Y$ が A **を止めている** (A **上で停留する**, stationary) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in A, \forall s \in I$, $H(x,s) = H(x,0)$.
A を止める f から g へのホモトピーが存在するとき，$f \simeq_A g$ と書く．
注：道 $\ell, \ell' : I \to Y$ について，$X = I$ と考えると，前に定義した $\ell \simeq \ell'$ は，今の言葉で言えば，$A = \partial I (:= \{0,1\})$ で停留するホモトピーがあること，つまり，$\ell \simeq_{\partial I} \ell'$ と書ける．
10.3 写像のホモトピーと基本群準同形
基点つきの場合，連続写像 $f : (X, p_0) \to (Y, q_0)$ と $g : (X, p_0) \to (Y, q_0)$ が**基点を止めてホモトープ** ($f \simeq_{p_0} g$) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \{p_0\}$ を止める f から g へのホモトピーが存在する：$H(x,0) = f(x), H(x.1) = g(x), H(p_0, s) = q_0$．このとき，次が成立する：

> $f \simeq_{p_0} g \Rightarrow f_{\#} = g_{\#} : \pi_1(X, p_0) \to \pi_1(Y, q_0)$.

● １１．空間の同相とホモトピー同値

11.1 ホモトピー同値.
X と Y を位相空間とする．
連続写像 $f : X \to Y$ が**同相写像** (homeomorphism) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f$ が連続かつ全単射で，f^{-1} も連続．
X と Y が**同相である** (homeomorphic)(あるいは，**位相同形である** (topologically isomorphic) ともいう) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} X$ から Y への同相写像が存在する．
このとき，$X \approx Y$ と書く．

> X, Y, Z を位相空間とするとき，(1) $X \approx X$, (2) $X \approx Y \Rightarrow Y \approx X$, (3) $X \approx Y, Y \approx Z \Rightarrow X \approx Z$.

問４６． 上を示せ．

> 連続写像 $f : X \to Y$ が**ホモトピー同値写像** (homotopy equivalence) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 連続写像 $g : Y \to X$ で，$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X : X \to X$ かつ $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y : Y \to Y$ をみたすものが存在する．
> X と Y が**ホモトピー同値** (homotopically eqivalent) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} X$ から Y へのホモトピー同値写像が存在する．

このとき，$X \simeq Y$ と書く．
注：記号 $\simeq$ は写像がホモトープであることと，位相空間がホモトピー同値であることの両方に使うことに注意．混同しないように．

> X, Y, Z を位相空間とするとき，(1) $X \simeq X$, (2) $X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X$, (3) $X \simeq Y, Y \simeq Z \Rightarrow X \simeq Z$.

問４７． 上を示せ．

11.2 同相とホモトピー同値.

> X, Y を位相空間とするとき，$X \approx Y \Rightarrow X \simeq Y$.

問４８． 上を示せ．

11.3 ホモトピー同値と基本群.

X, Y を弧状連結な位相空間とする．
$X \simeq Y$ (ホモトピー同値) $\Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$ (群同型).

問４９． X, Y を位相空間, $p_0 \in X, q_0 \in Y$, $f : (X, p_0) \to (Y, q_0)$ を連続写像とする．もし，連続写像 $g : (Y, q_0) \to (X, p_0)$ があって，$g \circ f \simeq_{p_0} \mathrm{id}_X$, $f \circ g \simeq_{p_0} \mathrm{id}_Y$ (基点を止めてホモトープ) が成り立つならば，$f_\# : \pi_1(X, p_0) \to \pi_1(Y, q_0)$ は群同型写像であることを証明せよ．

11.4 変位レトラクト.
X を位相空間，$A \subseteq X$ を部分空間とする．

A が X の**レトラクト** (retract) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 連続写像 $f : X \to A$ で，$\forall p \in A$ に対し，$f(p) = p$ となる，つまり，$f|_A = \mathrm{id}_A$ をみたすものがある．

上の条件を満たす写像 f を**レトラクション** (retraction) とよぶ．
問５０． $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$ と $\pi_1(D^2) \cong \{e\}$ をを用いて，$S^1 \subset D^2$ は D^2 のレトラクトではありえないことを示せ．

A が X の**変位レトラクト** (deformation retact) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 連続写像 $H : X \times I \to X$ で，(i) $\forall p \in X$, $H(p, 0) = p$, (ii) $\forall p \in X$, $H(p, 1) \in A$, (iii) $\forall p \in A, \forall s \in I$, $H(p, s) = p$ の３条件をみたすものが存在する．

問５１． $f_s(p) = H(p, s)$ とおくとき，上の３条件は，それぞれ，(i) $f_0 = \mathrm{id}_X$, (ii) $f_1(X) \subseteq A$, (iii) $\forall s \in I, f_s|_A = \mathrm{id}_A$, と書き換えられることを確かめよ．
問５２． メビウスの帯 $X := (I \times I)/\sim$, $(0, y) \sim (1, 1 - y)$, に対し，$A := \{[(x, \frac{1}{2})] \in X\} (\approx S^1)$ は X の変位レトラクトであることを示せ．

A が位相空間 X の変位レトラクトならば，包含写像 $i : A \to X$ はホモトピー同値写像である．

問５３． $A \subseteq X$ が変位レトラクト，$p_0 \in A$ とするとき，$\pi_1(X, p_0) \cong \pi_1(A, p_0)$ を示せ．

位相空間 X が**強い意味で可縮** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ある１点 $p_0 \in X$ に関して，$\{p_0\}$ が X の変位レトラクト．
位相空間 X が**弱い意味で可縮** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{id}_X : X \to X$ が，ある定値写像とホモトープ．

問５４． 位相空間 X が強い意味で可縮ならば，弱い意味で可縮であることを示せ．
問５５． 位相空間 X が弱い意味で可縮ならば，X は弧状連結であることを示せ．
問５６． 位相空間 X が弱い意味で可縮ならば，任意の基点 $p_0 \in X$ について，$\pi_1(X, p_0) \cong \{e\}$ であることを示せ．
問５７． D^n や $\mathbf{R}^n$ は強い意味で可縮であることを示せ．

● １２．円周の基本群と写像度

12.1 リフトと写像度.
以前に紹介した

$\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$.

を改めて丁寧に証明する．
$S^1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} (= \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\})$.
基点は $p_0 = (1, 0) \in \mathbf{R}^2$ ($p_0 = 1 \in \mathbf{C}$) にとる．
$\Omega(S^1, p_0) := \{\ell : I \to S^1 \mid \ell$ は連続, $\ell(0) = p_0, \ell(1) = p_0\}$. $(I = [0, 1])$.
$\ell \in \Omega(S^1, p_0)$ に対して，**写像度** (mapping degree, あるいは**回転数**, rotation number) $\deg(\ell) \in \mathbf{Z}$ を定義する．そのために，まず，次を確認：

連続写像 $\widetilde{\ell} : I \to \mathbf{R}$ で，$e^{i2\pi\widetilde{\ell}(t)} = \ell(t)$, $\widetilde{\ell}(0) = 0$ を満たすものが唯一つ存在する．$(i = \sqrt{-1})$.

注：条件 $e^{i2\pi\widetilde{\ell}(t)} = \ell(t)$ は，$(\cos 2\pi\widetilde{\ell}(t), \sin 2\pi\widetilde{\ell}(t)) = \ell(t)$ ということ．
$\pi : \mathbf{R} \to S^1$ を，$\pi(x) := e^{i2\pi x}, (x \in \mathbf{R})$ で定義すると，$\pi \circ \widetilde{\ell} = \ell$. このとき，$\widetilde{\ell}$ を π に関する ℓ のリフト (lift, lifting) と呼ぶ．
さて，

$\widetilde{\ell}$ を π に関する ℓ のリフトとするとき，$\deg(\ell) := \widetilde{\ell}(1)$.

注：$exp(i2\pi\widetilde{\ell}(1)) = \ell(1) = 1$ なので，$\widetilde{\ell}(1) \in \mathbf{Z}$.

12.2 リフトの存在と一意性の証明.
存在：$\ell : [0, 1] \to S^1$ は**一様連続**なので，n を十分大きくとると，$\ell([\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]), j = 1, 2, \dots, n$ は S^1 全体にならない．$\pi : \mathbf{R} \to S^1$ について，S^1 から１点 q_0 を除くと，連続写像 $s : S^1 \setminus \{q_0\} \to \mathbf{R}$ で $(\pi \circ s)(z) = z (z \in S^1 \setminus \{q_0\})$ となるものが存在する．(さらに，与えられた $x_0 \in \mathbf{R}, \pi(x_0) \neq q_0$ に対して，$s(\pi(x_0)) = x_0$ となるようにできる)．このことを使って，リフト $\widetilde{\ell}$ を $[0, \frac{1}{n}]$ 上で定め，それを延ばして，$[0, \frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ 上で定め，最終的に，$[0, 1]$ 上に拡張する．
一意性：２つのリフト $\widetilde{\ell}, \widetilde{\ell}'$ で，$\widetilde{\ell}(0) = 0, \widetilde{\ell}'(0) = 0$ があったとすると，$e^{i2\pi\widetilde{\ell}(t)} = \ell(t) = (e^{i2\pi\widetilde{\ell}'(t)}$ なので，$e^{i2\pi(\widetilde{\ell}(t) - \widetilde{\ell}'(t))} = 1$. したがって，$f(t) := \widetilde{\ell}(t) - \widetilde{\ell}'(t) \in \mathbf{Z}, (0 \leqq t \leqq 1)$. S^1 は**連結**なので，$f(t)$ は一定値をとる．$t = 0$ のとき，$f(0) = \widetilde{\ell}(0) - \widetilde{\ell}'(0) = 0$ なので，$f(t) = 0, (0 \leqq t \leqq 1)$. よって，$\widetilde{\ell}(t) = \widetilde{\ell}'(t), (0 \leqq t \leqq 1)$. よって，$\widetilde{\ell} = \widetilde{\ell}'$.

位相空間 X が**連結**
$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} X$ の開集合 U, V で $X = U \cup V, U \cap V = \emptyset$ ならば $U = \emptyset$ または $V = \emptyset$
$\Leftrightarrow X$ の開かつ閉集合は $\emptyset$ か X 自体だけ．

問５８． X を連結な位相空間，$f : X \to \mathbf{R}$ を連続写像とする．もし $f(X) \subseteq \mathbf{Z}$ ならば，f は定値写像であることを示せ．

12.3 道のホモトピーと写像度.

$\ell, \ell' \in \Omega(S^1, p_0)$ に対して，
$\ell \simeq \ell' \Rightarrow \deg(\ell) = \deg(\ell')$.

実際，ℓ から ℓ' への p_0 を止めたホモトピー $H : I\times I \to S^1$ があるが，その“リフト”$\widetilde{H} : I \times I \to \mathbf{R}$, (連続写像で $\pi\circ\widetilde{H} = H$ をみたすもの) で $\widetilde{H}(0,0) = 0$ を満たすものを構成する．すると，$\widetilde{H}(0,s) = 0$ であり，$\widetilde{H}(1,s)$ は s によらず一定．しかも，リフトの一意性 (8.1, 8.2) から $\widetilde{H}(t,0) = \widetilde{\ell}(t), \widetilde{H}(t,1) = \widetilde{\ell'}(t)$．したがって，$\deg(\ell) = \widetilde{\ell}(1) = \widetilde{H}(1,0) = \widetilde{H}(1,1) = \widetilde{\ell'}(1) = \deg(\ell')$.
参考項目：

> (X, d_X) を距離空間とする．このとき，次が成り立つ：X がコンパクト $\Leftrightarrow$ X の任意の点列 (p_n) が収束する部分列 $(p_{n(k)})$ を持つ.

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間,
写像 $f : X \to Y$ が**一様連続** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall p, \forall q \in X,\ d_X(p,q) < \delta \Rightarrow d_Y(f(p), f(q))$.

> X, Y を距離空間，X はコンパクトとする．このとき，任意の連続写像 $f : X \to Y$ は一様連続である.

12.4 写像度が準同型写像を誘導すること.
8.3 の結果から，写像 $\deg : \pi_1(S^1, p_0) \to \mathbf{Z}$ が誘導される.

> $\ell, m \in \Omega(S^1, p_0)$ に対して,
> $\deg(\ell\cdot m) = \deg(\ell) + \deg(m)$. ($\ell\cdot m$ は道の積).

$\widetilde{\ell}, \widetilde{m} : I \to \mathbf{R}$ をそれぞれ ℓ, m のリフトで，$\widetilde{\ell}(0) = 0$, $\widetilde{m}(0) = 0$ とするとき,
$\widetilde{\ell\cdot m}(t) := \widetilde{\ell}(2t)(0 \le t \le \frac{1}{2})$,
$\widetilde{\ell\cdot m}(t) := \widetilde{\ell}(1) + \widetilde{m}(2t-1)(\frac{1}{2} \le t \le 1)$
とおくと，$\widetilde{\ell\cdot m} : I \to \mathbf{R}$ は，$\ell\cdot m$ のリフトで，$\widetilde{\ell\cdot m}(0) = 0$ を満たす．したがって，$\deg(\ell\cdot m) = \widetilde{\ell\cdot m}(1) = \widetilde{\ell}(1) + \widetilde{m}(1) = \deg(\ell) + \deg(m)$.
12.5 $\deg : \pi_1(S^1, p_0) \to \mathbf{Z}$ が群同型写像であること.
単射であること：
$\ell, \ell' \in \Omega(S^1, p_0)$ とし，$\deg(\ell) = \deg(\ell')$ とする．リフト $\widetilde{\ell}, \widetilde{\ell'}$ について，$\widetilde{\ell}(1) = \widetilde{\ell'}(1)$ である．そこで，$\mathbf{R}$ 上の道として，$\widetilde{\ell}$ から $\widetilde{\ell'}$ へのホモトピー $\widetilde{H} : I \times I \to \mathbf{R}$ を，$\widetilde{H}(t,s) := (1-s)\widetilde{\ell}(t) + s\widetilde{\ell'}(t)$ で定義できる．$H := \pi\circ\widetilde{H} : I \times I \to S^1$ とおくと，H は S^1 上の ℓ から ℓ' への基点 p_0 を止めたホモトピーを与える．したがって，$\ell \simeq \ell'$．よって，$[\ell] = [\ell'] \in \pi_1(S^1, p_0)$.
全射であること：
各 $n \in \mathbf{Z}$ に対し，$\ell_n(t) := e^{i2n\pi t}$ とおくと，$\ell_n \in \Omega(S^1, p_0)$ で，$\deg(\ell_n) = n$.
問５９． $\deg(\ell_n) = n$ を示せ.

● １３．融合積とファンカンペンの定理.

13.1 自由群
$2n$ 個の文字 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}$ からなる有限文字列を**語** (word) という.
例：$w = x_2x_1^{-1}x_3x_1x_2^{-1}x_2^{-1}.v = x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$ 等.
空語 (何もない文字列) も語の一種と見なし，e で表す.
語の積も自然に定義される.
語の全体の集合 $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に同値関係 $\sim$ を導入する：$w \sim v \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 語の中の $x_ix_i^{-1}$ や $x_j^{-1}x_j$ という部分を取り除いたり，付け加えたりして w から v に変形される.
例：$x_1x_3^{-1}x_3x_2 \sim x_1x_2 \sim x_1x_1^{-1}x_1x_2$ このとき,

> $w \sim v$ かつ $w' \sim v' \Rightarrow ww' \sim vv'$.

商集合 $W(x_1, x_2, \dots, x_n)/\sim$ は群になる．これを，$x_1, x_2, \dots, x_n$ で生成される**自由群** (free group) とよび，$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ あるいは，$\langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$ で表される.
単位元は空語 e の同値類．$x_1x_2^{-1}$ の逆元は，$x_2x_1^{-1}$．実際，$x_1x_2^{-1}x_2x_1^{-1} \sim x_1x_1^{-1} \sim e$.
例：$n = 1$ の場合，$F(x_1) = \langle x_1\rangle$ は，x_1 で生成される巡回群であり，$\mathbf{Z}$ と群同型であり，可換群である.
例：$n = 2$ の場合，$F(x_1, x_2) = \langle x_1, x_2\rangle$ は非可換群である：$x_1x_2 \neq x_2x_1$.
$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の元を，その代表元である語で表す．たとえば，$x_1x_3^{-1}x_3x_2 = x_1x_2 = x_1x_1^{-1}x_1x_2$ 等.

13.2 群の表示
$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の中の元 $w_1, w_2, \dots, w_s$ に対して，$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の中の $w_1, w_2, \dots, w_s$ を含む最小の正規部分群を $|w_1, w_2, \dots, w_s|$ で表す．そして，商群 (剰余群) $F(x_1, x_2, \dots, x_n)/|w_1, w_2, \dots, w_s|$ を
$\langle x_1, x_2, \dots, x_n | w_1, w_2, \dots, w_s\rangle$
あるいは，$\langle x_1, x_2, \dots, x_n | w_1 = e, w_2 = e, \dots, w_s = e\rangle$
で表す.
13.3 群の融合積
G, H, K を群とし，$\varphi : K \to G$ と $\psi : K \to H$ を群準同型写像とする.
まず，G の元と H の元からなる語の全体を考える：$x_1x_2\dots x_n$ ($x_i \in G$ または $x_i \in H$) の形の語で，空語も許す．それを e と書く.
ただし,

> $x_1x_2\dots x_n = y_1y_2\cdots y_m$
> である必要十分条件は，e_G や e_H を挿入，消去という操作と，x_i, x_{i+1} が共に G の元か，共に H の元のとき，$\cdots x_ix_{i+1}\cdots$ を $\cdots(x_ix_{i+1})\cdots$ に置換，またはその逆操作を有限回くり返して互いに移りあうことである,

という具合に同一視する．(自由群の構成と類似)．このような語の全体は群になる．これを G と H の**自由積** (free product) と呼び，$G * H$ と書く.
さらに，$\varphi(K)^{-1}\psi(K) := \{\varphi(k)^{-1}\psi(k) \in G*K \mid k \in K\}$ とおき，$|\varphi(K)^{-1}\psi(K)|$ を，$G*K$ の中で $\varphi(K)^{-1}\psi(K)$ を含む最小の正規部分群を表すとき,

> $G *_K H := G * H/|\varphi(K)^{-1}\psi(K)|$
> (G と H の K による融合積 (amalgamation)).

と定義する．融合積は，準同型 φ や ψ にも依存する.

注：$K = \{e\}$ のとき，$G *_{\{e\}} H \cong G * H$ である.
例：$G = \langle x_1\rangle$ (自由群), $H = \langle x_2\rangle$(自由群) のとき，$G * H \cong \langle x_1, x_2\rangle$ (自由群)．例：$G = \langle x_1, x_2\rangle$ (自由群), $H = \langle x_3\rangle$(自由群) のとき，$G * H \cong \langle x_1, x_2, x_3\rangle$(自由群)．以下同様.

13.4 ファンカンペンの定理

> X を位相空間，X_1, X_2 を X の開集合，$X_0 = X_1 \cap X_2$ は弧状連結とし，$p_0 \in X_0$ とする．このとき，$\pi_1(X, p_0) \cong \pi_1(X_1, p_0) *_{\pi_1(X_0, p_0)} \pi_1(X_2, p_0)$ (融合積).

証明のおおよその筋道を講義で説明する予定.

13.5 ブーケの基本群
r 個の円周 S^1 を１点で接着してできる空間を $\vee_r S^1$ で表す．$\vee_2 S^1 = S^1 \vee S^1$ は 8 の字である.

$\pi_1(\vee_r S^1) \cong \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ (自由群).

13.6 球面の基本群

$\pi_1(S^n) \simeq \{e\}$ 自明群 $(n \geqq 2)$.
$(\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$ に注意$)$.

13.7 円板の貼り合わせによる基本群の変化

$\pi_1(D^2 \cup_\varphi X, p_0) \cong \pi_1(X, p_0)/|[A]|$.
ただし，φ は D^2 の境界から X の部分空間 A への同相写像.

例：トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ の基本群は $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ と同型である．$p_0 = (1,1), A = S^1 \times \{1\}$ とし，D^2 を A に沿って T^2 に貼り付けて得られる空間 $D^2 \cup_\varphi T^2$ (φ は適当にとる) の基本群は，$\mathbf{Z}$ と同型である.
したがって,「クロワッサン」の２つの先端をくっつけてできる図形 ($D^2 \cup_\varphi T^2$ とホモトピー同値) の基本群も $\mathbf{Z}$ と同型である.

問６０.
(1) メビウスの帯の基本群を求めよ (問５２参照).
(2) メビウスの帯の境界に沿って，円板をはりつけてできる曲面 (つまり射影平面) の基本群を，ファンカンペンの定理を使って求めよ.

13.8 閉曲面の基本群

$\pi_1(\#_g T^2) \cong$
$\langle x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_g, y_g \mid$
$x_1^{-1} y_1^{-1} x_1 y_1 x_2^{-1} y_2^{-1} x_2 y_2 \cdots x_g^{-1} y_g^{-1} x_g y_g = e \rangle$

$\pi_1(\#_g \mathbf{R}P^2) \cong \langle x_1, x_2, \ldots, x_g \mid x_1^2 x_2^2 \cdots x_g^2 = e \rangle$.

● １４．基本群と被覆空間.

14.1 被覆空間
E, X を位相空間とし，$p : E \to X$ を，全射連続写像とする.
組 (E, p) が X 上の **被覆空間** (covering space) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in X$ に対して X における x の開近傍 U と E の互いに交わらない開集合たち $U_j (j \in J)$ が存在して，$p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} U_j$ であり，$p|_{U_j} : U_j \to U$ が同相写像 $(j \in J)$.

注：ここでいう「被覆空間」と，コンパクト性の定義のときに登場する「開被覆」(open covering) とは，まったく無関係.
例：$p : S^1 \to S^1$, $p(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t)$ とおくと，(S^1, p) は S^1 上の被覆空間.
例：$p : \mathbf{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ とおくと，$(\mathbf{R}, p)$ は S^1 上の被覆空間.
問６１．上の $(\mathbf{R}, p)$ が S^1 上の被覆空間であることを示せ.

14.2 普遍被覆空間
$p : E \to X$ を被覆空間とする．E が単連結（弧状連結であって，$\pi_1(E)$ が自明群）であるとき，(E, p) を X 上の**普遍被覆空間**とよぶ.

位相空間 X が **局所的に可縮** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in X$ と x の X における $\forall$ 開近傍 U に対して，$x \in V \subseteq U$ となる可縮な開近傍 V が存在する.
問６２．S^1 は，弧状連結で局所的に可縮であることを示せ.
注：一般に，位相多様体は局所的に可縮である.

定理：X が弧状連結，局所的に可縮ならば，X 上の普遍被覆空間 $p : E \to X$ が一意的に存在する：ただし，一意的とは，$(E, p), (E', p')$ が共に X の普遍被覆空間とするとき，図式

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

が可換 $(p' \circ \sigma = p)$ となる同相写像 σ が存在する.

14.3 普遍被覆空間と基本群

定理：14.2 と同様の状況で，$\pi_1(X)$ は，(E, p) の被覆変換群

$$\left\{ \sigma : E \to E \text{ 同相写像} \;\middle|\; \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\sigma} & E \\ p \searrow & \circlearrowleft & \swarrow p \\ & X & \end{array} \right\}$$

と同型である.

問６３．$\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$ を，上の定理を用いて再証明せよ.（つまり，問６１の被覆空間の被覆変換群が $\mathbf{Z}$ と同型になることを示せ）.

基本用語集. 位相空間．開集合．閉集合．開集合系．閉集合系．同相である．位相同形．相対位相．商位相．閉曲面，向き付け可能．向き付け不可能．コンパクト空間．ハウスドルフ空間．位相多様体，可算基．連続写像．道．道の積．群．群準同型．群同型．基本群．直積位相．ホモトピー．ホモトピー同値．不動点．写像度．弧状連結 (道連結)．連結．レトラクト．変形レトラクト．強い意味で可縮．弱い意味で可縮．自由積．融合積．ファンカンペンの定理．被覆空間，普遍被覆空間．被覆変換群.