小テスト 幾何学２（トポロジー入門）

担当 石川 剛郎(いしかわ・ごうお)

No. 9　(西暦２００６年７月１２日)

学生番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

教科書，講義プリント，ノート類は見ないで，次の問に答えよ．

問１：次の空欄・空白（２ヶ所）を埋めよ．
位相空間 X の部分空間 A が X の変位レトラクト (deformation retract) とは，______ の点をまったく動かさずに，X を A に連続的に縮められることである．正確な定義を書くと，「__________ $H : X \times [0,1] \to X$ で，$H(x,0) = x, H(x,1)$________$(x \in X), H(x,s) = x(x \in A, 0 \leq s \leq 1)$ を満たすものが存在する」ということである．

問２：次の空欄・空白（３ヶ所）を埋めよ．
$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ とする．このとき，$A = \{\boldsymbol{x}_0\}$ は $\mathbf{R}^n$ の変位レトラクトである．実際 $H : \mathbf{R}^n \times [0,1] \to \mathbf{R}^n$ を $H(\boldsymbol{x}, s) = (1-s)\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{x}_0$ で定めると，H は連続写像であり，$H(\boldsymbol{x}, 0) =$ ______$, H(\boldsymbol{x}, 1) =$ ______$, H(\boldsymbol{x}_0, s) =$ ______ が成り立つ．

問３： 次の空欄・空白（６ヶ所）を埋めよ．
$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \ni p_0 = (1,0)$ とする．次のようにして，基本群 $\pi_1(S^1, p_0)$ を求めることができる：まず $\pi : \mathbf{R} \to S^1, \pi(t) = (\cos 2\pi t,$__________$)$ と定める．すると，$\pi^{-1}(\{p_0\}) = \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ (整数全体の集合）である．任意のループ $\ell : [0,1] \to S^1, \ell(0) = \ell(1) = p_0$ に対して，$\mathbf{R}$ 上の道 $\widetilde{\ell} : [0,1] \to \mathbf{R}$ で，$\widetilde{\ell}(0) = 0, \pi(\widetilde{\ell}(t)) = \ell(t), (0 \leq t \leq 1)$ を満たすものが一意的に ____________．そこで，$\pi(\widetilde{\ell}(1)) = \ell(1) =$ ______ に注目して，ループ ℓ の写像度を $\deg(\ell) :=$ ________ $\in \mathbf{Z}$ で定める．このことから，群としての __________ $\varphi : \pi_1(S^1, p_0) \to \mathbf{Z}$ が $[\ell] \in \pi_1(S^1, p_0)$ に対して $\varphi([\ell]) :=$ ________ により与えられる．