

小テスト 幾何学 2 (トポロジー入門)

担当 石川 剛郎 (いしかわ・ごうお)

No. 8 (西暦 2006 年 7 月 5 日)

学生番号

氏名

教科書, 講義プリント, ノート類は見ないで, 次の問に答えよ.

問 1 : 次の空欄・空白 (4ヶ所) を埋めよ.

位相空間 X, Y がホモトピー同値 $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ 連続写像 $f : X \rightarrow Y$ と $g : \underline{\hspace{2cm}}$ が存在して, $g \circ f : X \rightarrow X$ が X の恒等写像とホモトピック, $f \circ g : \underline{\hspace{2cm}}$ が $\underline{\hspace{1cm}}$ の恒等写像と $\underline{\hspace{2cm}}$.

問 2 : 次の空欄・空白 (5ヶ所) を埋めよ.

基点付きの位相空間 $(X, p_0), (Y, q_0)$ が基点を止めてホモトピー同値 $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ 連続写像 $f : (X, p_0) \rightarrow (Y, q_0)$ と $g : \underline{\hspace{2cm}}$ が存在して, $g \circ f : (X, p_0) \rightarrow (X, p_0)$ が X の恒等写像と基点を止めてホモトピック, $f \circ g : \underline{\hspace{2cm}}$ が $\underline{\hspace{1cm}}$ の恒等写像と基点を止めて $\underline{\hspace{2cm}}$.

このとき, 誘導される基本群の間の準同型写像に関して, $g_{\#} \circ f_{\#} = (1_X)_{\#} = 1_{\pi_1(X, p_0)}$, $f_{\#} \circ g_{\#} = (1_Y)_{\#} = 1_{\pi_1(Y, q_0)}$, となるので, $f_{\#} : \pi_1(X, p_0) \rightarrow \pi_1(Y, q_0)$ は群としての $\underline{\hspace{2cm}}$ であることがわかる.

問 3 : 次の空欄・空白 (3ヶ所) を埋めよ.

メビウスの帯 $M = [0, 1] \times [0, 1] / \sim$, (ただし, $(0, y) \sim (1, 1 - y)$) と単位円 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ について, $f : M \rightarrow S^1$ を, $f([(x, y)]) = (\cos 2\pi x, \underline{\hspace{2cm}})$ で定義すると, f は well-defined な連続写像であり, $g : S^1 \rightarrow M$ を $g(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) = [(x, \underline{\hspace{1cm}})]$, $0 \leq x \leq 1$ で定義すると, g は well-defined な連続写像となり, $g \circ f \simeq 1_M$ かつ $\underline{\hspace{2cm}}$ を満たす. したがって, M と S^1 はホモトピー同値である (実際, 基点をうまく選べば, 基点を止めてホモトピー同値であることもわかる).