幾何学２ 質問に対する回答

No. 2 （２００６年6月２１日の分） 担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力していますが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，**直接質問してください**．文体を（です，ます調に）統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．回答書は，

http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html にも掲載予定です．

問．「基本群の計算」の”計算”が，結局どういうものを指すのか，わからないです．

答．良く分かった群 G に対して，$\pi_1(X, p_0) \cong G$ を示したとき，計算できた，と言うのが適切な表現だと思います．ようするに，具体的に求める，ということです．

問．基本群を考えることによって，何ができるようになるのですか？

答．図形を，群という代数的な構造を使って研究できるようになります．

問．ホモトープを考えることの利点を教えてください．位相不変量を探すという事に関連してきますか？

答．関連してきます．それが主目的です．

問．一般に２つの位相空間が同相でないことを示すには，どうすればいいですか？たとえば，$\mathbf{R}$ と $[0,1]$ は同相ですか？$\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}^2$ は同相ですか？「存在しないことの証明」は難しいこと多いと思います．

答．基本群のような位相不変量，あるいは，一般に位相不変性（同相なら共有する性質）に着目して区別します．$\mathbf{R}$ と $[0,1]$ は,（後で説明するように）基本群が共に自明群になるので，基本群では区別できません．しかし，同相写像 $\varphi : \mathbf{R} \to [0,1]$ が存在すると仮定して矛盾を導くことにより，同相でないことが証明できます．その際，使うことは，$\mathbf{R}$ から任意の１点を除いてしまうと弧状連結でなくなること，$[0,1]$ から点 1 を除いても，$[0,1)$ が残って，弧状連結のままであること，そして，弧状連結という性質は，位相不変であることです．実際，いま，同相写像 $\varphi : \mathbf{R} \to [0,1]$ が存在するとすると仮定しましょう．φ は全単射なので，$\varphi(a) = 1$ となる $a \in \mathbf{R}$ がただ１つあります．このとき，φ から，同相写像 $\psi : \mathbf{R} \setminus \{a\} \to [0,1)$ が誘導されますが，$\mathbf{R} \setminus \{a\}$ は弧状連結ではなく，$[0,1)$ は弧状連結です．これは，弧状連結という性質が位相不変であることに反します．したがって，$\mathbf{R}$ と $[0,1]$ の間に同相写像は存在しえない，つまり，$\mathbf{R}$ と $[0,1]$ は同相でないことが証明されます．

同じアイディアで,「$\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}^2$ が同相でない」ことが証明できます．**皆さん証明してみてください**.

それから,「$\varphi : X \to Y$ が同相写像で，X が弧状連結ならば，Y も弧状連結であることを示せ」という問題も，**皆さん，ついでに解いておいてください**.

問．基本群の元の数（濃度）は，図形の重要な性質を表しはしないのでしょうか？

答．表します．たとえば，基本群が自明群（元が単位元だけ１個）であるが，自明群でない（元が２つ以上）かは，図形の重要な性質です．また，基本群が有限群か，無限群か，ということも重要な性質です．

問．基本群のイメージがわきません．たとえば，”穴のない”位相空間であれば，基本群は自明群となりますか？種数２の閉曲面の基本群の位数はどうなりますか？

答．いわゆる可縮な空間の基本群は自明になります．種数２の閉曲面は，無限非可換群になります．トーラスの基本群は，$\mathbf{Z}^2$ であり，無限可換群です．”穴” の周りを何重にも回るループもある，ということに注意しましょう．詳細は講義で説明します．

問．可換群になる基本群とはどのようなものですか？

答．たとえば，円周の基本群は $\mathbf{Z}$，トーラスの基本群は $\mathbf{Z}^2$ でともに可換群になります．比較的，簡単な図形の場合と言えます．

問．トーラス上のループのホモトピー同値類には，どんな種類がありますか？

答．トーラスの基本群は，２つの元で生成されます．トーラスを $S^1 \times S^1$ と書き，$p_0 = ((1,0),(1,0))$ を基点とすれば，１番目の S^1 に沿って一周するループと，２番目の S^1 に沿って一周するループが生成元になります．逆周りの場合にはマイナスが付きます．

問．基本群は $\pi_1(X, p_0)$ と書きますが，π の添字の ”1” は，何が意味があるのですか？

答．あります．道のパラメータが１次元である，ということです．正方形 I^2 から X への連続写像で，正方形の周囲を基点 $p_0 \in X$ に写すものを基に構成しても群ができるのですが，それは２次ホモトピー群とよばれ，$\pi_2(X, p_0)$ と表します．不思議なことに，２次以上のホモトピー群は，すべて可換群になります．

問．可換群と加群は同じ定義ですか？

答．本質的には同じ定義です．ただし，加群という場合，演算はたし算で書きます．

問．群として同型，というのは，どのようなことをイメージすればよいのですか？// 基本群 $\pi_1(X, p_0)$ と $\pi_1(Y, q_0)$ が群として同型である時の具体的なイメージがつかめません．

答．この場合は，具体的にイメージしやすいが調べづらい対象（図形）から，イメージしなくても代数的に調べやすい対象（群）を抽象したのだから，とくに無理をしてイメージを持たなくてもよいと思います．群が同型とは，単に，群演算を保つ全単射がある，ということ，それだけです．

問．なぜ $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \setminus \{0\}, \varphi(x) = e^x$ が準同型なのですか？左辺の演算はたし算で，右辺はかけ算になっているのが気になります．

答．違う集合の上の演算なので，違う演算であるし，記法も違っても当然なわけです．

問． well-define についてよくわかりません．// well-defined であるとは，一般に何を調べればいいのですか？// どういう定義をしたとき，well-defined であるかどうか確かめるのですか？// どういうときに，well-defined を示すべきなのか，示さないと，何が不都合になるのかわかりません．

答． たとえば，ある写像を定義しようとしたとき，それが本当に写像になるのか確かめる，ということです．確かめられたら，"ちゃんと" 定義されているから，well-defined だと言い，写像になっていなかったら，写像がちゃんと定義されていないから，well-defined でない，と言うわけです．たとえば，有理数全体 $\mathbf{Q}$ から整数の組全体の集合 $\mathbf{Z}^2$ への写像を「$\frac{n}{m} \in \mathbf{Q}$ に対して，$(n, m) \in \mathbf{Z}$ を対応させる」ということで"定義"しようとします．でも，これは well-defined ではありません．実際，たとえば，$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ なのに，その写り先は，$(1, 2) \neq (2, 4)$ なので，写像の条件を満たしません．このように,「写像とは何か」をもう一度謙虚に思い出すと，自ずから答えは出てきます．

問． 道の変形のところで，パラメータのとり方がわかりません．特に変形のパラメータ s のとり方がなぜそういう形で書けるのか，よくわからないです．// ホモトピーを自分でうまく定めることができないのですが，どのように考えればいいのですか？

答． 自分で考えるというより，講義で説明した（あるいは，プリントにある）ホモトピーの例を理解する，ということでよいと思います.（ホモトピーの与え方は１つではありません）.

問． ホモトピー $H(t, s)$ のグラフが良くわかりません．// 図の意味がわかりません．

答． ホモトピーを ts-平面上で場合分けして定めるときの，場合分けの図です．

問． ホモトピーがよくわかりません．// ホモトープであるとはどういうことですか？// ホモトープな道の具体的なイメージを教えて下さい．

答． ホモトピーは２つの道の間の始点と終点を止めた連続的変形です．具体的なイメージは,「縄とび」が良いと思います．胴体を除いた補空間の道です．右手と左手が端点です.（２人で回しているときは，その２人の位置が端点）．縄とびしているところをビデオにとり，スローモーションで再生してください．道の連続変形が見えるはずです．始点と終点が一致する場合（つまりループの場合）は,「あやとび」でやってください．

問． ホモトピーになめらかな写像であるという条件を加えると，これによって構成される群（$\pi_1(X, p)$) は，基本群 $\pi_1(X, p)$ と異なるものになりますか？

答． 構成の仕方に注意が必要ですが，同型な群が得られます．微分可能な写像でパラメータ付けられたループであっても，その軌跡は，特異点や自己交差をもちうる，ということに注意しましょう．

問． 道のホモトピー類の積の定義 $[\ell]\cdot[\ell'] := [\ell\cdot\ell']$ がよくわかりません．$[\ell] = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$, $[\ell'] = \{\ell'_1, \ell'_2, \dots, \ell'_m\}$, $[\ell \cdot \ell'] = \{\ell_i \cdot \ell_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ で，これを $[\ell]\cdot[\ell']$ と定義する，ということでしょうか？

答． 基本的な考え方は正しいですが，もっと簡単に考えた方が良いです．同値類は集合だ，とはいちいち意識しないで，代表元を連れてきて間に合わす，という発想でよいと思います.「代表元をとって定義する」ということです．いわば代議員制です．毎回，国民投票をやっていたら大変です．代表に話合ってもらうわけです.（もちろん，誰を代表に選んでも，結果が同じということが保証されている必要があり，この場合，$\ell_1 \simeq \ell_2, \ell'_1 \simeq \ell'_2 \Rightarrow \ell_1 \cdot \ell'_1 \simeq \ell_2 \cdot \ell'_2$ ということが成り立つので OK.）ところで，この場合，同値類は有限集合ではありません．

問． ホモトピー同値類 $[\ell]$ は，写像のある同値類を集めた集合ですが，これは幾何学的にどういう意味があるのですか？

答． ホモトピック（ホモトープ）な道は同じ要素と見る，同一視するということです．粗視化です．

問． 位相空間上の道が存在するならば，X が道連結ということではないですか？

答． 違います．道連結とは，すべての２点に対して，それらを結ぶ道があるということです．

問． 実射影平面とはどういうものですか？射影と名がついているのに，$\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}$ への射影，と言った時の射影とは，だいぶ違うものに見えます．

答． $\mathbf{R}P^2$ は，３次元空間の原点を通る直線全体の集合と見なされます．原点から射影しているイメージです．

問． "A と B を貼り合わせてできる空間"は，数学的には，どのように考えれば良いのですか？具体的な解答例が知りたいです．

答． 数学ですから，写像と同値関係を縦横に使って明確に考えられます．具体的には，前回の回答書や講義ノートを参考にして勉強してくださいね．

問． ユークリッド空間以外でトポロジーを考えることはありますか？今の数学の分野で，トポロジーの意外な使い方をしているものはあるのでしょうか？

答． あります．たとえば，位相解析やネットワーク理論などです．すべての分野で使われています．

問． $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし，写像 $f : [0, 1] \to A$ を，$f(t) = 1, t \in [0, \frac{1}{5}); f(t) = 2, t \in [\frac{1}{5}, \frac{2}{5}); f(t) = 3, t \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}); f(t) = 4, t \in [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}); f(t) = 5, t \in [\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$ で定義し，A と $\mathbf{R}$ に離散位相を入れると，この写像は連続写像となるのですか？

答． もちろん連続です．定義域が離散位相ならば，何でも連続です．

問． ２角形がわかりません．トポロジーは自由に辺をのばしたりひっぱったりすることができると習ったので，円と同じように辺を変形させることができてしまう気がします．

答． その通りです．その通りで何の問題もない，ということです．円も，２角形も３角形も皆，同相です．

問．「証明しなさい」と言われても，証明の方法がわからないものが結構あります．そのような場合は，そのようにすればよいでしょうか？

答． 教科書やノートの証明を繰り返し読んで，よく理解して，たくさん経験を積んでください．では，よろしく．