幾何学２ 質問に対する回答

No. 1 （２００６年5月１０日の分） 担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力していますが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，**直接質問してください**．文体を（です，ます調に）統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．回答書は，
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html にも掲載予定です．

問． なぜ，$S^2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ を２次元球面というのですか？次元の数え方がよくわかりません．メビウスの帯とクラインの壺は，それぞれ何次元ですか？

答． S^2 がどの空間の中に置かれているか，そのことは気にしないで，S^2 そのものに注目し，つまり，球の表面だけに注目し，その外側の空間や，内側の空間には，目もくれないようにして，S^2 を純粋に見てあげれば，S^2 は２次元である，ということがわかると思います．(ところで，人間の価値についても，その周囲の状況に惑わされずに，その人そのものを見てあげるようにしましょう）.「次元」というものは，実は難しい概念なのですが，この場合，S^2 上の点の位置を，何個の座標で表されるか，その個数を次元と言います．球面上の点は，たとえば「緯度」と「経度」を使えば，２個の座標で表されるので，S^2 は２次元です．メビウスの帯とクラインの壺もそれぞれ２次元です．

問． $S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ を $(n-1)$ 次元球面と言いますが，決して，$n-1$ 次元に存在するわけではないと思うのですが，どうしてこのように表記するのでしょうか？

答． 外側の空間，つまり「器」（うつわ）の次元ではなく，あくまで，それ自身の次元を表記します．直線や円の次元は１です．平面（２次元）上にあっても１次元です．空間（３次元）内にあっても１次元です．

問． クラインの壺とはどういうものですか？「実際にはこんな壺はない」「四次元空間なら可能」などと言われても何のことやらよくわかりませんでした．これは要するに，壺がお互いに交わらないなら三次元なら不可能，たとえば，２次元の xy 平面上にひもがあったとすると，交わらないことは不可能だが，xyz 空間なら可能ということと同じ，ということと同じということですか？

答． そうです．クラインの壺は，$\mathbf{R}^3$ の部分位相空間としては実現できないが，$\mathbf{R}^4$ の部分位相空間としては実現できるということです（$\mathbf{R}^4$ の部分位相空間でクラインの壺と同相なものが存在する）.

問． すべての空間図形 (本日の講義では球) はいくつかの平面のはり合わせと同一視できるのでしょうか？たとえば正六面体は球面と同一視できますか？

答． これから講義で説明する，２次元多様体，であればできます．正六面体は球面と同相です．

問． 商空間の位相で”図形をはり合わせる”というのがよくわからないです．

答． 「はり合わせる」ということは，何らかの同一視をして，新しい図形を作るということを意味しています.「同一視」=「同値関係を設定して商集合を作る」,「新しい図形を作る」=「商位相を導入して位相空間とする」ということです．

問． 商集合に位相を入れて図形を切ったりはったりする，とはどういうことですか？

答． 商位相は「貼る」に対応します.「切る」ということと商位相は直接は関係ありません．たとえば，正６面体の展開図がありますが，展開図には，$\mathbf{R}^2$ からの誘導位相を入れます．それを貼って正６面体を作るとき，それには商位相を入れます．そして，その商位相が，正６面体を $\mathbf{R}^3$ に実現したときの誘導位相と一致する（同相である）わけです．

問． 商位相についてよくわかりません．何かイメージしやすい例が欲しいです．

答． 具体例として,「シリンダー」（円筒）の例を，詳しく説明してみましょう.（シリンダーで商位相をよく知るんだー???）．正方形 $I^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$，とその部分空間 $A = \{(0,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le y \le 1\}, B = \{(1,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le y \le 1\}$，それから，同相写像 $\varphi : A \to B$ を $\varphi((0,y)) = (1,y)$ を考えます.（ここで，具体的に図示してイメージをふくらませてください）．A と B を φ を使ってはり合わせます．つまり，$(0,y) \in A$ と $\varphi((0,y)) = (1,y)$ を同一視します．すなわち，$(0,y) \sim (1,y)$ という関係になるように同値関係 $\sim$ を定めて，商集合 $X = I^2/\sim$ を作ります.（正方形の左辺 A と右辺 B が同一視されている）．いま，A 上の点 $(0,y)$ は，B 上の点 $(1,y)$ と同一視されて，X の要素 $[(0,y)] = [(1,y)]$ を形成します．この点の「開近傍」をどう定めるか，というと，I^2 における $(0,y)$ の開近傍と，I^2 における $(1,y)$ の開近傍で，境界に面する部分が φ で移りあうようなもの，それらの和集合の同値類全体を $[(0,y)] = [(1,y)]$ の開近傍とするわけです．こうして，A と B を密着させてつなげた，ということを数学的に表現しているわけです．これが，$X = I^2/\sim$ 上の商位相です．イメージできましたか？難しいですか？要するに，つながり具合を指定しています．ところで，この位相空間 $X = I^2/\sim$ は，$\mathbf{R}^3$ 内の $Y = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, 0 \le x_3 \le 1\}$ と同相な位相空間です.（できれば証明を付けてみてください）.

問． 商集合 $W = X/\sim$ について，X 上の同値関係 $\sim$ が初めからちゃんと与えられていれば理解できるのですが，講義の中の $W = (D^2 \coprod D^2)/\sim$ の $\sim$ がどのように定義されているのかがよくわかりませんでした．

答． 詳しく書いてみます：２つの D^2 の円周の部分をそれぞれ同一視するのですが，それを式で表すと，$D^2 \coprod D^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1 \text{ または } (x-3)^2+y^2 \le 1\}$（図示してみてください）の上の同値関係 $\sim$ を $(x,y) \sim (x',y')$ $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} ((x,y) = (x',y'))$ または $(x^2+y^2 = 1$ かつ $(x',y') = (x+3,y))$ または $(x'^2+y'^2 = 1$ かつ $(x,y) = (x'+3,y'))$

で定める，ということです．

問． 商集合を $X/\sim$ で表しますが，”$\sim$” の同値関係の扱い方がよくわかりません．”$\sim$” は適当な演算が入るのですか？

答． 具体的な問題では，必ず，具体的な同値関係が明示されるので安心してください．自分で問題設定する機会があれば，自分で同値関係を定めます．

問． 商集合 $X/\sim$ の元 $[x]$ は集合ですよね．$\pi : X \to X/\sim$ という写像を考えると，$x \mapsto [x]$ と，元に対して集合が対応しているのが，いま一つ腑に落ちません．

答． 集合を（別の集合の）要素と見なすことはよくあることです．たとえば，$\mathbf{R}$ の有界開区間たちの集合 $\{(a,b) \subset \mathbf{R} \mid a < b, a, b \in \mathbf{R}\}$ の要素は，(a,b) という集合ですね．でも気になりませんね．ところで，有理数の定義を知っていますか？有理数全体の集合は $\mathbf{Q} = (\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\}))/\sim$ ただし，$(n,m) \sim (n',m') \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} nm' = n'm$ という同値関係，に関する商集合でしたね．有理数１つ１つは集合です．それを１つの数と見なしているわけです．２分の１は，$\frac{1}{2} = [(1,2)]$ です．このように集合を要素と見なすことは日常茶飯事（さはんじ）です．慣れの問題です．どんどん慣れるようにしましょう．

問． 全射 $\varphi : X \to Z$ があると，X 上に同値関係が定まるのはなぜですか？

答． $x \sim x' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \varphi(x) = \varphi(x')$ と定めます．

問． 集合 X, Z に対し，全射の写像 $\varphi : X \to Z$ があれば X 上の同値関係が導かれるのはわかるのですが，その商集合と Z の間の全単射が φ で導かれるというのがどういうことかわかりません．

答． $\psi : X/\sim \to Y$ を $\psi([x]) = \varphi(x)$ によって定めます．このとき ψ は (i) well-defined で (ii) 単射で (iii) 全射です．(i) は，$[x] = [x']$ とすると，$x \sim x'$ なので，$\varphi(x) = \varphi(x')$ となることからわかります．(ii) は $\psi([x]) = \psi([x'])$ とすると，$\varphi(x) = \varphi(x')$ なので，$x \sim x'$ であり，$[x] = [x']$ となるのでわかります．(iii) は,（φ が全射だから）任意の $y \in Y$ に対し，$x \in X$ があって，$y = \varphi(x)$ となるので，$y = \psi([x])$ となることからわかります．

問．「well-defined」とはどういうものなんですか？

答． 写像になっている，ということです．写像になっている，ということは，定義域の各要素に対して，その行き先がただ１つに定まっている，ということですね.（x に対し，y が１つに定まる）．たとえば，直前の回答では，同値類 $[x]$ の行き先 $\psi([x])$ を代表元 x ととって $\varphi(x)$ と定めていますが，その定め方が，代表元の選びかたによらないのか，ということを調べています．そういうことです．

問． プリント３枚目の問 10 で，φ が全射であるという条件は必要ですか？

答． よいところに気がつきましたね．必要はありません．全射でなくても定義できます．X が位相空間，Z が集合で，$\varphi : X \to Z$ が写像であれば,「$U \subseteq Z$ が Z の開集合 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \varphi^{-1}(U) \subseteq X$ が X の開集合」によって，Z 上の位相が定義されます.（φ が全射でない場合は，商位相とは呼びづらいですが，とにかく位相を定義できるのは確かです）．

問． 商位相の定義と写像が連続であることの定義は，とてもよく似ていますが，何か意図があるのですか？

答． よいところに気がつきましたね．X が位相空間で，Z が集合のとき，$\varphi : X \to Z$ が連続になるような Z 上の位相のうち，最強のものが商位相です．

問． $Z = [0,1]/\sim$ ただし，$x \sim x' \Leftrightarrow (x = x' = 0 \text{ または } x, x' \in (0,1])$ がハウスドルフでないのはなぜですか？

答． 同値類はたった２つ $[0] = \{0\}$ と $[1] = (0,1]$ です．$Z = \{[0],[1]\}$ です．Z の開集合は，商位相の定義により，Z の開集合は，$\emptyset, \{[1]\}, Z$ だけです．$\{[0]\}$ については，$\pi : X \to Z$ に関する逆像が $\{0\}$ であり，$\{0\}$ は $[0,1]$ の開集合ではないので，$\{[0]\}$ は Z の開集合ではありません．したがって，$[0]$ と $[1]$ は，開集合によって分離できません．

問． 商位相の Hausdorff 性の判定の仕方が知りたいです．たとえば，射影空間の Hausdorff 性を示すのは，手間がかかりました．

答． なるほど．いくつか判定法（十分条件）が知られていますが，ここでは１つだけ紹介しておきます．位相空間 X に群 G が同相写像として作用しているとします.（つまり，G から $\mathrm{Homeo}(X)$ への群準同型写像が与えられている．このとき X を G-空間と言います）．このとき，G の作用で移りあう，という同値関係が定まりますが，その商空間を X/G と書きます．いま，X がハウスドルフで，G が有限群ならば，X/G はハウスドルフです.（証明を考えてみてください．教科書 p.37 には群作用に関する記事があります）．

問． 講義中の２つの円板から S^2 への写像が全射になることは納得がいくのですが，単射性がいま一つ理解できません．

答． ２つの円板 W からの写像は単射ではありません．あくまで，誘導される $W/\sim$ からの写像が単射ということです．S^2 の同じ点に写る２点は同値であるので，$W/\sim$ の同じ要素を定めるからです．$W = D^2 \coprod D^2$ と S^2 が同相ということではなくて，$W/\sim$ と S^2 が同相です．

問． プリントの問１１によると,「写像 $\varphi : X \to Z$ は（X の位相と，Z の商位相に関して）連続」です．これは，$x_0 \in X$ をとってきた時に，ある x_0 の近傍が存在して，その近傍内の全ての点が，x_0 と同値になるということですか？

答． 違います．たとえば，$X = \mathbf{R}^2$ に通常のユークリッド位相を入れ，$\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $\varphi(x_1, x_2) = x_1$ で定めると，$\mathbf{R}^2$ から φ によって，$\mathbf{R}$ 上に商位相が入ります．これは，通常のユークリッド位相と一致します．φ は連続です．同値類は，x_2 軸に平行な直線１本１本です．それらは $\mathbf{R}^2$ の中で内点を持ちません.（ちなみに，x_0 を含

む同値類は，$\varphi^{-1}(\varphi(x_0)) = \{x \in X \mid \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$ と表されます）．
問． 写像 $f : X \to Y$ は何をどこまで移すのですか？位相構造も写像によって移されるのですか？
答． f が位相構造を移すというよりも，f に「適合する」ような特徴的な位相が Y の上に導入される，と言った方がぴったりかなと思います．
問． 商位相の定義は大丈夫です．同値関係もやや抽象的ではありますが，具体例があるので理解できます．しかしそれらが組み合わされると，定義を追いかけるだけで具体的イメージが湧きません．
答． やはり具体例が必要ですね．教科書やプリントにはたくさんの例が書いてあるので，それを使って理解してください．
問． 商空間のイメージがうまくつかめないのですが，これで大丈夫なんですか？
答． 慣れないと大丈夫ではないですが，慣れれば大丈夫です．
問． disjoint union $W = X \coprod Y$ へは位相をどう入れるのですか？
答． 「$U \subseteq W$ が W の開集合 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} U \cap X$ が X の開集合であり，かつ，$U \cap Y$ が Y の開集合」と定義します．
問． ”貼り合わせる”というのは，もちろん講義では数学的な用語としてとらえれていますが，どうしても日常動作の”貼り合わせる”と一致させてしまします．この直感的な考えは，数学的用語としての”貼り合わせる”と同じ事なのでしょうか？紙と紙をのりで貼り合わせるのは，接触点と接触点で同値関係をもつことだということなのですか？
答． 紙とのりは，あくまで「比喩」あるいは「たとえ」であると考えてください．でも，抽象的なことを理解する助けになりますね．
問． 「W を A と B を φ によって貼り合わせた空間」というのはアバウトに見えるのですが，こういう形でも証明に障りがないのでしょうか？
答． W, A, B, φ をそれぞれ明示すれば全然アバウトでなくなるので大丈夫です．ただし，明示しなくても容易に推測できる場合は書くのを省略してしまうこともあるので，その場合は，自分で賢く補ってから証明する必要があります．
問． よく集合を「割る」という表現がされていますが，小学校で習う「割り算」との意味の整合性がとれていません.「商集合」と「割り算」の概念に共通性を与えるには，そのように考えればよいですか？
答． 整数を 5 を法として分類することを考えましょう．5 で割って余りが 0 か 1 か 2 か 3 か 4 かで，都合５つの同値類（剰余類）に分かれます．これが商集合 $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ ですね．これでどうでしょう（商）．
問． 同相であるというのはどういうことですか？例えば，連続である $\leftrightarrow$ つながっている，のような直感的な説明が少し欲しいです．
答． 同相であるということを標語的に言うならば,「図形のつながり具合が同じ」ということです．
問． ２次元平面同士の貼り合わせから，ふくらみを持ったものが得られるという意味がよくわかりません．
答． 同相の範囲で少し曲げてから,「ふち」の部分だけをくっつけることをイメージするとよいと思います．ちなみに,「平ら」というのは位相的性質ではありません.（同相の範囲で，平らなものを曲げることができる）．
問． 最近，距離空間の完備性は位相的性質ではないことを知りました．他に，位相的性質でないものはありますか？
答． たとえば，距離空間の「有界性」は位相的性質ではないです．一方,「連結性」は位相的性質です．
問． ”開集合である”という場合に，どうして”X の開集合である”というように，何処で考えているのかを書かなければいけないのでしょうか？
答． たとえば，$\mathbf{R}^2$ 上の x 軸 $(\mathbf{R})$ の開区間 $\{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x < 1\}$ を考えてみましょう．この開区間は開集合ですか？開集合ではありませんか？そう尋ねられたら，皆さんはどう答えますか？正解は,「$\mathbf{R}$ で考えれば開集合だが，$\mathbf{R}^2$ の中で考えれば開集合ではない」です．このように，何処で考えるかで答えが変わってくるわけです．
問． $\mathbf{R}^2$ からその部分集合に相対位相を考えたとき，$\mathbf{R}^2$ で開でなくても相対位相では開になっても良いのでしょうか？
答． 良いです．部分集合それ自身を位相空間と捉えているからです．
問． 誘導位相で，$A \subseteq X$ が boundary を含んでいるとしたら，$V = A \cap U$ にも boundary が含まれるときがあるはずなのに，このときでも V は開としている理由がわかりません．
答． ”世界” を A だけに限定すれば,「境界」はもう境界ではなくなりますね．そうすると，V を開集合と言っても当然なわけです．それが「相対位相」というものです．
問． 定理 1 の証明の書き出しが $A = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となっていますが，どうしてでしょうか？A は閉集合なのに，なぜか開集合 U_λ で覆われているのでしょうか？
答． A に相対位相（誘導位相）を入れて，A 自身を１つの位相空間と考えて，その開集合からなる開被覆を考えているからです．つまり，U_λ は A の中の A における開集合です.（ちなみに，A の X における開被覆という用語もあります（プリント p.3 参照）その場合は，U_λ は X の開集合で，$A \subseteq \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ という設定です.）
問． 定理４の証明の中の U_a, U'_a は，x_0 をはじめにとって固定し，a に依存して決まる，と考えていいのでしょうか？つまり「はじめに $\forall x_0 \in X \setminus A$ をとり固定，$\forall a \in A$ をとると，$x_0 \neq a$ だから…」として，後半で x_0 を $X \setminus A$ の中で走らせて，$X \setminus A = \cup_{x_0 \in X \setminus A} U_{x_0}$ とする，という解釈でよいのでしょうか？
答． その解釈でよいです．ところで，その主張は，$\forall x_0 \forall a, \cdots$ ということなので，どちらが先か，は論理的には構わないのですが，理解の仕方としては，その順番で考えるとよいと思います．
問． 「位相を入れる」とはどういうことですか？

答． 開集合系を定めるということです．
問． そもそも何故，開集合系を定めることが位相を定めることになるのですか？
答． 開集合系を定めておけば，図形の連結性や，写像の連続性などが調べられるからです．位相のすべてが，開集合という概念だけで述べられるからです．
問． なぜ位相を考えるのかがわかりません．
答． 図形の連結性や，写像の連続性などを調べたいからです．
問． $\mathbf{R}^n$ が距離空間から位相空間になる，その定め方がよくわかりません．
答．「$U \subseteq \mathbf{R}^n$ が開集合 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, \forall x' \in \mathbf{R}^n, d(x, x') < \varepsilon$ ならば $x' \in U$」 と定めます．
問． 距離の定義は何ですか？$d : A \times A \to \mathbf{R}$ が A の距離であるとは，(i) $d(a,b) \geq 0$ (ii) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ (iii) $d(a,b) = d(b,a)$ (iv) $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$ と記憶していたのですが，プリントの距離の定義が普通の定義と違っていて，(ii) (iv) のみを定義として扱っていて，練習問題２でその２つを用いて (i) (iii) を示すようになっています．もしも，プリントの定義で距離を考えるなら，練習問題２はどう解くのですか？解けませんでした．
答． プリントの定義と普通の定義は，もちろん結果的に同じ定義なのですが，見た目が少し違っているわけですね．ところで，記憶は正確なのですが，注意してほしいのは，プリントの定義は，上の質問にある (ii) (iv) ではなくて，(ii) と (iv') $d(a,b) + d(a,c) \geq d(b,c)$ です．(ちょっとだけ違います）．(ii) (iv) から (i) (iii) を導くのは確かに無理なのですが，(ii) (iv') から (i) (iii) を導くことができます．参考のために解答例を書いておくと，(iv') で $b = c$ とおくと (ii) から $2d(a,b) \geq 0$ となり，(i) がわかります．また，(iv') で $a = c$ とおくと，$d(a,b) \geq d(b,a)$ がわかり，これは，任意の a, b について成り立つので，$d(b,a) \geq d(a,b)$ も導かれ，結局 (iii) が導かれます．さらに，(iii) が成り立てば，(iv) と (iv') は同じ条件なので，結局，距離の２つの定義は，同値であることがわかり，ホッとひと安心です．
問． コンパクトの定義がどのように作られたのかが知りたいです．
答． いろいろ苦労の末，１９世紀から２０世紀にかけて作られました．当時はインパクトがあったと思います．ところで，コンパクト性の定義をもう一度思い出してもらいたいのですが,「位相」の言葉，つまり「開集合」の概念（と集合論の概念）だけで表されていますね．したがって，コンパクトということは位相的性質である，ということに注目しましょう．
問． 写像の連続性を考えるとき，その定義より，逆写像を考えることになりますが，この逆写像の存在の確認はしなくても良いのですか？
答． 写像の連続性の定義に,「逆写像」(inverse mapping) は登場しません !! あくまで「逆像」(inverse image) が登場します.「逆像」と「逆写像」は違う概念です．逆像は全単射でなくても定義できる概念です．もう一度定義を思い出してみると，写像 $f : X \to Y$ と，部分集合 $U \subseteq Y$ に対して，$f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ が逆像の定義です．これ以外にはありません．いつもは，$f^{-1}(U)$ は f^{-1} と U を切り離さずに，まとめて使います．f^{-1} は一人歩きさせてはいけません．(全単射である，という特殊な状況では一人歩きさせても大丈夫)．
問． 同値関係であることを示すには,「同一律」「対称律」「推移律」の３つを示しますが，同一律はいつも自明である気がします．同一律はなぜ必要なのですか？
答． どうしてか，と言うと，同一律が成り立たない関係は同値関係とは呼べないからです．ところで，同一律は自明ではありません．そもそも，集合 X 上の２項関係とは，単に $X \times X$ の部分集合のことを指します．たとえば，$R = \emptyset \subset X \times X$ も立派な２項関係です．この関係（つまり，すべてのものに関係がない，という関係）については,「対称律」と「推移律」は成立しますが,「同一律」は成り立ちません．(R が $\{(x, x') \in X \times X \mid x = x'\}$ の真部分集合の場合には，同じ現象が起きます）．
問． 数日前 (GW 頃)，朝日新聞で，ロシアの数学者がポアンカレ予想を解いた，と載っていました．ポアンカレ予想とは何ですか？この問題の解決は，数学全体にとってどのような意味を持つのでしょうか？
答． わが家でも朝日新聞をとっているので，捜したらありました：５月３日（水）の総合面に「難問解明？踊る数学界」「ミレニアム問題の１つ，ポアンカレ予想」「ロシアの学者証明か」とありますね．ポアンカレ予想とは「３次元単連結閉多様体は３次元球面と同相か」という予想です．３次元閉多様体とは，この授業で紹介する「閉曲面」の３次元版です.「単連結」とは，この授業で説明する「基本群」がトリビアルになる（単位元だけからなる群になる）ということです．３次元球面は単連結ですが，３次元閉多様体の範囲でその逆が成り立つか？という予想です．ペレルマンという人の論文でポアンカレ予想が肯定的に解決されたという話ですが，まだ厳密には確認はされていません．いずれ結論が出ることでしょう．解けていれば，３次元多様体の分類が大きく進歩します．数学全体の進歩を意味します．
問． レポートにならなかった問や練習問題はたくさんありますが，それは各自で考えるものですか？
答． そうです．各自で考えてください．よく考えてみて，自分で解決できるのが理想ですが，よく考えて，それでもわからなかったら，質問してください．
問． 質問を考える時間が欲しいです．レポートと同じ１週間程度で．
答． なるほど．でも，質問は常に考えておくのがよいと思います．その質問が自分で解決できたら，また別の疑問が浮かぶ．１つのことがわかれば，２つわからないことが生まれる．２つの疑問が解決すれば，４つの疑問が生まれる．そうこうしているうちに，理解が網の目のように拡がり，見識が備わっていく，ということです.「青年よ，疑問を抱け」ということですね．ともかく事前に用意していれば，質問書のときにあわてなくてすみます．では，よろしく．