

# 現代数学概説のアンケートの質問に関する回答

## 特異点の分類問題 研究の苦労と喜び

2003年1月6日5限目 講演者 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

問．ADE 分類の証明の概要を教えてください．// 分類に用いた同値関係の求め方あるいはそれに関する参考文献について教えてください．

答．こんにちは．つたない講義を聞きに来てくれてありがとう．さて質問の回答ですが，講義では，参考文献として，泉屋周一・石川剛郎「応用特異点論」共立出版を挙げましたが，その他に，V.I. Arnol'd, S.M. Gusein-Zade, A.N. Varchenko 著「Singularities of Differentiable Maps I」Birkhäuser, (1985), などの本があります．また論文集で，V.I. Arnol'd 著「Singularity Theory」Selected Papers, London Math. Soc. Lecture Note Series 53, Cambridge Univ. Press (1981), があります．分類の証明の概要は，これらの文献を参照するとわかると思います．実はこの論文集を私(石川)は最近毎日，通勤電車の中で改めて読み返しています．ところで，この講義では，写像の特異点の分類を中心に話しましたが，関連する話題で，たとえば，特異点解消を応用して特異点の不変量を作る話，特異点のトポロジーの研究，特異点とクライン群の関係や，フロベニウス構造を通じて数理論理と関係する話などは，日本でも盛んに研究されているおもしろい分野です．立派な特異点研究者がたくさんいます．(私の講演がおもしろくなかったとしてもそれは特異点のせいではありません)．ともかく，なにか興味があれば，私に直接質問してもらえれば，適切なアドバイスができると思います．

問．カタストロフ理論についてもう少し詳しく知りたいのですが，紹介された本以外に読むべき論文があれば教えてください．// Thom による基本カタストロフの分類などがもう少し知りたいです．

答．カタストロフ理論については，何といても，ルネ・トム著「形態形成と構造安定性」宇敷訳，岩波書店，が基本的な原典ですが，よりわかりやすい文献として，上に挙げたものの他に，福田・野口著「初等カタストロフィー」共立出版，V.I. Arnold 著「Catastrophe Theory」Springer，などを参考にしてください．

問． $f(x, y) = x^3 + y^2$  のバーサル開折で，本質的に3項しか残らないところをもっと知りたいです．// unfolding の解説での”本質的に必要の意味”は何ですか？

答．同値関係は， $xy$  平面の局所座標で移りあう関数を同値とするものですが，その同値関係に注目したときに必要，という意味です． $f(x, y) = x^3 + y^2$  の versal 開折は， $x^3 + y^2 + ax$  で与えられます．(a は small parameter)．この意味するところは， $x^3 + y^2 + ax$  という形のものから，同値関係と，考えている原点の平行移動と，パラメータ変換とによって， $x^3 + y^2$  の変形(摂動，開折)がすべて得られる，ということです． $x^3 + y^2 + ax$  だけを調べれば， $x^3 + y^2$  の近くにある特異点はすべて調べ尽くすことができる，そのことが保証されている，というのが「versal 開折」の特長です．

問．特異点論の具体例をもう少し挙げて欲しいです．

答．たとえば，小野さんの講義にも出てきた  $x^2 - y^2$  や  $x^3 - 3xy^2$  など関数の特異点(臨界点)の例です．

問．分類できた特異点の図形的な差異は目で見れるのですか？

答．個人の視力(眼力，がんりき)によります．目で見て違いがわかる場合もあるし，わからない場合もあります．また，どんな同値関係に関して分類するか，ということにもよりますね．

問．シンプレクティック分類というものをより深く聞いてみたいです．

答．「シンプレクティック構造」と呼ばれるものがあるのですが，そのシンプレクティック構造を保つ微分同相写像をシンプレクティック同相(symplectomorphism)と呼び，多様体とか写像をシンプレクティック同相で分類することが現在盛んに行われています．シンプレクティック位相幾何やシンプレクティック特異点論と呼ばれる分野です．

問．物理などで出てくる特異点の理論も少し参考にしたかったので，説明して欲しかったです．

答．物理といっても範囲が広いので，何をピックアップするか難しいところですね．すぐに思い浮かんでも，物性物理の物質の欠損(defect)の話，宇宙物理のブラックホールやビックバンの話，重力レンズの話，素粒子物理のミラー対称性やフロベニウス構造と特異点の関係，などなどいろいろありますが，これらを詳しく説明するのはなかなか難しいです．

問．正多面体の分類で次元が高いときはとけているのですか？

答．講義では、分類とはどういうものか、ということの説明のための例として、良く知られた正多面体の分類を挙げました．それはともかく、高次元の多面体についても、もちろんある程度はわかっています．興味があれば、たとえば、Coxter 著「Regular Polytopes」Dover Publications, Inc.(1973) か、一松信著「正多面体を解く」東海大学出版会(1983)、クロムウェル著「多面体」シュプリンガー・フェアラーク東京(2001)、などを眺めてみるとよいと思います．

問．特異点を分類したらその後はどうなるのですか？

答．分けたあとは結び付けます．たとえば、現在知られている(ある種類の)特異点の分類と、正多面体の分類が、実際に関連することがわかっています．(このことは、例えば、松澤淳一著「特異点とルート系」(すうがくの風景6)朝倉書店、に書いてあります)．またその他に、一見まったく関係ないと思われるようなことがらが、特異点の分類を通して結び付けられるということがしばしば起こります．しかも、その結びつきは、分類する前には予見できない、分類結果を見て初めてわかる(わかった)ことです．ですから、分類なしでは何もわからない、分類すれば何でもできる、というわけです．ところで、僕(石川)は分類屋です．数学研究者を3つに分類すると「数学屋」と「数学者」と「数学家」に分かれます．ただし、この分類は、客観的に定まった集まりを、客観的な基準で分けているわけではないので、数学的な分類ではありません．technic 志向なのが数学屋、art 志向なのが数学家、それらが調和した存在が数学者でしょうか! ? それはともかく、分類屋は数学屋の組に属します．ですから、僕は数学屋です．早く、数学者になりたいと思っています．

問．この分野だけのことではないのですが、外国人の方と共同研究されるときに苦労話とかを聞きたいです．

答．とくに外国の人との共同研究だから苦労するわけではなく、日本人との共同研究でも苦労しますが、共同研究は楽しいことも多いです．苦労話ではないですが、共同研究のために、ポーランドのワルシャワの出かけていったとき、到着した空港で、僕のスーツケースが出てこなくて、(結局、最後まで見つからずに)、替えのパンツなどを買うのに、英語が通じず難儀したのは楽しい思い出です．それはともかく、相手を尊敬し、こちらも尊敬してもらえるようにがんばる、ということが共同研究のコツですね．

問．OHP 8 枚目に「全てのことは集合と写像の言葉で記述できる」とありますが、どうやって証明するのですか？

答．証明はできません! 「すべてのこと」とか「記述できる」ということは、明確に定義されていないことがらなので、これは数学の定理ではなく、「信念」「スローガン」のようなものだと思います．でも、数学は、基本的に、集合と写像の言葉で論理的に考える学問です．皆さんが数学科で勉強していて、集合と写像の言葉以外で数学がわかったような気分にならなければならぬ、(そのような理解の仕方でも有用ではありますが不十分なので)、さらにもう一度勉強し直して、すべての数学を、集合と写像の言葉に翻訳して理解し直しておいてください．

問．研究の極意の中の「こだわらない」というのは具体的にどういうことなのですか？

答．「研究の極意：見逃さない、手を抜かない、こだわらない、あきらめない」の「こだわらない」の部分に関する質問ですね．若い皆さんには、とりあえず「見逃さない、手を抜かない」ということだけを肝に命じてもらえれば良いと思います．その上で、説明しますが、(下手なたとえ話で恐縮ですが、)これからはテレビジョンの時代だから、その機会を見逃さずにテレビ(の受像機)を作る、手抜きしないでちゃんと作る．でもしばらくの間、真空管を使ってもうまくできていたので、それにずっとこだわって、新しい素材を使わないでテレビを作り続けるようなことは良くないよ、ということです．もちろん、「こだわり」は研究に絶対に必要ですが、研究のある段階では、こだわりを捨てることも大切です．その上で、あきらめないで作り続けることが必要です．ところで、数学は年をとるとあまり研究できなくなると言われています．(ここで「年」とは実年齢ではなく、精神年齢のことです)．その指摘が本当なのかどうかは不明ですが、可能な要因の一つとして、年をとると過去の成功体験にどうしてもこだわるから、数学ができなくなる、と考えられます．「これでうまく行っているんだから、このままでよい」「いまさらそんなことを考えていられない」「そんなことやったら恥じだ」「もう遅い」などとこだわってしまうわけですね．そんな negative な状態は、「集中力をそくようなこだわり」とでも表現できるでしょうか．こだわらないことは本当に難しいと実感している毎日ですが、自戒をこめて書いている次第です．(こんなことをくどくど書いているのは、もう私が年を取ったからでしょうね．) それはそうと、何かのついでに、北大数学教室のホームページ <http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/> の教官紹介のページを覗いてみてください．ではまた．

補足．質問の文章は、文体を統一するために、文意を変えない範囲で変更しています．ご了承ください．最後になりましたが、講演する機会を与えてくださった、数学科教務委員会、教務委員長の辻下徹さんと、世話人の松下大介さんに感謝します．