平面幾何の旅・質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 9 (２００１年6月１９日) の分

問. ２次曲線の定義が，高校で習った定義と違うようです．どういうことなのでしょうか？ペンシルからペンシルへの射影を使った楕円の定義と，高校のころ習った楕円の定義には違いがあるのでしょうか？

答. こんにちは．違いがわかる人間になりたいと思いながら，ネスカフェ・ゴールドブレンドの CM を昔から (遠藤周作氏のころから) 見ています．さて，回答ですが，導入が違うだけで，本質的に同じ対象です．ここでは，２次曲線を「射影」という考え方を中心に紹介したかったので，講義で紹介したような定義の仕方になりました．２次式で定義される曲線 (この講義では「２次代数曲線」) と定義してもほぼ同じことです．ただし，射影平面上では，楕円も双曲線も放物線も区別しません (区別できません).

問. 双曲線をのばしていくと漸近線と交わるのでしょうか？

答. 無限遠点で交わります．つまり射影平面内では交わります．普通の平面上では交わりません．

問. ２次曲線はどうして２次曲線というのですか？プリントの「上の意味の２次曲線は２次代数曲線であり」とはどんな意味ですか？

答. ２次式で定義されることがわかるからです．ペンシルからペンシルへの射影から定まる曲線は，２次式で定義される，という意味です．

問. ２次曲線の式 $ax^2+by^2+cxy+ex+fy+d=0$ の式は，たとえば，だ円という図形を調べてこの式にいきついたのか，先に式が定義されたのか，どちらなのですか？

答. 推測ですが，楕円があり，それが２次式で表されたことから，２次曲線の重要性が認識された，という流れだと思います.

問. 平面幾何の世界で２次曲線 (楕円) の定義はいくつ存在するのですか？

答. よい質問ですね．数学で基本的な対象なので，定義の仕方もたくさんあります．いくつ存在するか，と尋ねられたら，いくらでも存在する，と答えます.

問. 高校での授業で習った楕円，双曲線の性質は，楕円は，２定点 (焦点) からの距離の和が一定，双曲線は，焦点からの距離の差が一定というものでした．このような性質は射影幾何の観点からどのように説明するのでしょうか？

答. 射影幾何では，長さや距離は使いません．射影変換のもとでは，距離が変わってしまうからです．ですから，楕円や双曲線の距離を使った定義も採用しません．事実，射影平面内では，楕円と双曲線を区別しません.

問. 退化した２次曲線は，どのような式で表されるのですか？

答. 定義式の２次式が１次式の積に分解するような場合です．つまり，$(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=0$ という形の式です.

問. 直線は曲線の一種ですか？固有２次曲線でない２次曲線は,「２直線からなる」という時点で，曲線ではないと思います.

答. 直線は曲線の一種です．曲線はいろいろありますが，その非常に特別なものとして直線があります．ちなみに，平面は曲面の一種です．したがって，２直線も曲線の一種と考えるので，２次曲線と呼んでもおかしくありませんね.

問. 「固有二次曲線上の３点は同一直線上にはない」ということは，図から見て直感的にわかり，その証明も理解したつもりですが，先生の言っていた,「複素平面で考えると３点で交わる」というのがわかりません.

答. 楕円と直線の交点の個数のことですね.「複素平面で考えると３点で交わる」ではなく,「複素平面で考えると (重複度をこめて) ２点で交わる」と言ったつもりでした．楕円の内部を通る直線なら当たり前ですが，楕円の外部を通過する直線についても，複素平面の範囲まで考えると，交点が２点生じます．ここで，複素平面と言っているのは,「複素数平面」$\mathbf{C}$ ではなく，$\mathbf{C}^2$ (あるいは $\mathbf{C}P^2$ です)．ここでのキーワードは「複素化」です.

問. 固有２次曲線上の３点は同一直線上にはないということですが，本当にないのですか？一般式からみれば，$a=0, b=0, c=0$ のときは，$y=Ax+B$ の形となり，直線の式で，同一直線上に無限に点をとることが可能になります.

答. 本当にないです．直線は,「固有」２次曲線ではないことに注意しましょう.

問. ３点は同一直線にはない２次曲線は固有２次曲線であるという逆は成立しますか？

答. 良い質問ですね．成立します．ある２次曲線について,「３点は同一直線にはない」とすると，その２次曲線を定めている射影は，配景写像ではありえないから，配景写像以外の射影であり，定義により，その２次曲線は固有２次曲線です.

問. 直線と固有２次曲線の交点が１点の場合はないのですか？接線になる場合など，１点になる時はあるのではないでしょうか？

答. その通りです．あります．交点は「たかだか」２点ということです.

問. 「たかだか」という表現は,「多くても」と同じ意味ですか？

答. 同じ意味です.

問. ペンシルからペンシルへの射影が与えられたとき，対応する各直線の交点を描く軌跡 (２次曲線) の作図の仕方がよくわかりません.

答. 作図はできません．われわれは定規しか使えないからです．頭の中で想像してください.

問. ２次代数曲線は２次曲線の定理において，固有曲線を特定するのに，５点が必要である，という部分がわかりません.

答. ２次曲線の全体の中で特定できるということです．たとえば，楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ を決めるには，２次代数曲線 $ax^2+by^2+cxy+ex+fy+d=0$ の中で，a,b,c,e,f,d の連比が，$1,\dfrac{1}{4},0,0,0,1$ と決める必要があり，そのためには，５つの連立１次式が必要であるということです.

問. ２次曲線は２次式で表されるけど，実際は線だから１次元なのですか？

答. その通りです.「２次元曲線」ではなく「２次曲線」です．曲線の「次数」が２ということです.

問. n 次曲線上に直線を引くとき，交点は最大で何本できるのですか？

答. 交点は最大 n 個です．ところで，射影平面の点は，３次元空間で言うと直線だから,「何本」と尋ねているのですね.

問. ペンシルの双対は直線なのですか？

答. １直線上にある点のあつまりです．レンジ (range, 連珠) と言います.

問. ペンシルの概念がわかりません.

答. ペンシルは「直線の集まり」です．ペンシルは集合であり，その要素は直線です．

問. ペンシルからペンシルへの配景写像はわかるのですが，ペンシルからペンシルへの射影というもののイメージがどうしてもつかめません．

答. そうでしたか．平面上の３点 P, Q, R と配景の軸を２本 ℓ, m を任意に書いて，(1) 点 P を通る直線を３本引き，(2) それと直線 ℓ の交点を求め，(3) それらの交点と点 Q を結んで，(4) できる直線たちと直線 m の交点を求め，(5) それらと点 R を結べば，射影の作図のハイ出来上がりです．

問. 「直線 OO' を直線 OO' に写すならば，その射影は...」というところがわかりません．１つの線を同じ線に写すというのはどういうことですか？

答. ここで言っている射影というのは,「点 O を通る直線のなす集合から点 O' を通る直線のなす集合への写像」です．点 O を通る直線のなす集合 (ペンシル) の要素は直線です．点 O' を通る直線のなす集合 (ペンシル) の要素も直線です．１つ１つの直線がメンバーです．その O を通るそれぞれの直線が，O' を通るどれかの直線に対応するということなので，その両方の集合に属している直線 OO' が直線 OO' に写されることもあるわけですね．

問. パップスの定理の双対定理は次のようで良いのでしょうか？「直線 ℓ, m, n が点 P で，直線 ℓ', m', n' が点 Q で交わるとき，直線 ℓ と ℓ' の交点を a, 直線 n と m' の交点を b，直線 m と ℓ' の交点を c，直線 n と n' の交点を d，直線 m と m' の交点を e，直線 ℓ と n' の交点を f としたとき，直線 ab, cd, ef はある一点で交わる」．

答. まったくその通りです．感激しました．

問. ２次曲線の双対を考えることはできないのですか？

答. できます．その接線の双対を考えます．各接線の双対は射影平面上の点なので，それらは曲線を形成します．それが「双対曲線」と呼ばれるものです．

問. ２つの円錐を使った２次曲線の発見はいつごろですか？円錐曲線という考え方は，２次曲線を考えるために生まれたものなのですか？

答. ギリシャ時代だと思います．円錐曲線が先にあり，その後，円錐曲線を２次曲線として理解した，というのが歴史の流れだと思います．

問. 円錐曲線自体は式で表すことができるのですか？

答. できます．円錐を $x^2+y^2-z^2=0$ で表し，平面を空間に埋め込む写像を $(x,y)\mapsto(ax+by+c, a'x+b'y+c', a''x+b''y+c'')$ とすると，その平面と円錐の切り口を，xy 平面上で表す式は，$(ax+by+c)^2+(a'x+b'y+c')^2-(a''x+b''y+c'')^2=0$ となります．これを展開すると，２次代数曲線であることがわかります．

問. 円錐を，接平面で切ると，１直線になると思いますが，それも２次曲線 (円錐曲線) と言えるのですか？

答. 言えます．見た目は１直線ですが，２本の直線が重なっていると考え，２次曲線と考えます．xy 平面で言うと，式 $x^2=0$ で定まる曲線です．

問. ２次曲線の空集合とは何ですか？$x^2+y^2=-3$ のように x, y が虚数になるときのことですか？

答. その通りです．

問. $ax^2+by^2+cxy+ex+fy+d=0$ の式で表される曲線で，$a>0.b>0, c=e=f=0, d>0$ のときはどんな曲線を描きますか？

答. 空集合です．

問. ４次曲線は２次曲線以上のバリエーシュンがあるのですか？

答. もちろんあります．

問. 無限遠直線と呼んでいるものは「無限遠平面」ではないのですか？

答. 無限遠直線でよいのです．１次元的なものなので，平面ということはできません．

問. 射影平面の点は，空間ベクトルで定まる「視線」というのがわかりません．どこから誰が見ての視線なのですか？

答. 原点から君が見ます．

問. 直線が２本あれば，一方はある直線を軸とした，もう一本の配景写像であると必ず言えると思うのですが，どうですか？

答. 任意の直線 ℓ から，任意の直線 m への配景写像が必ずあるか，という質問だと思いますが，ℓ と m 上にない点をとれば，その点を中心とした ℓ から m への配景写像がありますね．

問. 太陽は１つの点と考えて，そこから出た光が地球に届くときは，平行光線となっていると習いました．ということは，現実世界が射影の世界になっている... ?! 平行線 (光線) が１点 (太陽) で交わっています!! 発見．

答. なるほど．ところで，太陽光線が平行線というのは，太陽がとても遠くにあるので「ほぼ平行線に近い」ということだと思います．厳密には平行ではないでしょうね．

問. ２直線が重なったとき，その２直線は「交点」を持っていると言えるのですか？

答. 言えます．

問. 射影幾何の空間への拡張はありますか？

答. もちろんあります．n 次元であります．

問. n 次元空間に対して，$n-1$ 次元の射影「空間」なるものを定義できるのでしょうか？

答. 定義できます．$\mathbf{R}^n$ の１次元部分ベクトル空間からなる集合として，$n-1$ 次元射影空間 $\mathbf{R}P^{n-1}$ が定義されます．

問. ２次曲線は射影幾何で扱えるとのことですが，他の曲線は扱えますか．

答. 扱えます．いわゆる代数曲線 (2 次曲線，3 次曲線，4 次曲線,...) を扱う「射影代数幾何」，可微分曲線を扱う「射影微分幾何」という分野に現在受け継がれて研究されています．

問. 双対ベクトル空間とは何ですか？量子力学に双対はありますか？

答. $\mathbf{R}^n$ の双対ベクトル空間 $(\mathbf{R}^n)^*$ は $\mathbf{R}^n$ 上の１次形式の全体の空間です．$(\mathbf{R}^n)^*$ の 0 でないベクトルに対して，その核として，$\mathbf{R}^n$ の $(n-1)$ 次元ベクトル空間 (超平面) が対応します．これが，今説明している双対の正体です．ところで，量子力学に双対があるか，双対量子力学があるかという問は奇抜で好きですが，わかりません．

問. 代数や解析での「双対」とは，具体的にどんな置き換えが起こるのですか？

答. 双対ベクトル空間を考えるということなので，幾何と同じです．

問. 正多面体では，双対は存在すると思うのですが，その中で，正６面体と正８面体，正１２面体と正２０面体，はそれぞれちがう正多面体と双対ですが，正４面体だけは同じ正４面体に双対します．違いはありますか？調べると，正多面体の各面の重心を結んでできる正多面体は双対だと書いてありました．

答. なるほど．違いというか，そのような現象はしばしば生じます.「自己双対」であると言います.
問. 楕円の２接線が直交する点を結ぶと円になりますね.
答. そうですね.
問. 「ペンローズのタイル張り」での高次元空間とは３次元空間でもよいのですか？
答. 手許に詳しい資料がないのですが,「ペンローズのタイル張り」は,「５次元空間」の格子点を，斜めに，２次元空間に射影して得られたと記憶しています．平面幾何といえども高次元の影が隠れているわけですね.
問. 球面上の２点の最短距離はどうやって求められますか？
答. その２点と原点を通る平面で球面を切り取ってできる大円に沿っての２点の距離です.
問. 三角関数が三角形をもとに定義されたとありますが，三角関数は原点中心，半径１の円で定義されているのではありませんか？三角形をもとにして定義すると，どうやって関数の変数を定義するのですか？
答. もちろん単位円を使って定義するのですが，もともと，三角関数 $\sin, \cos, \tan$ は，直角三角形の斜辺分の高さ，斜辺分の底辺，底辺分の高さ，で定義されました．変数は，底辺と斜辺のなす角度です.
問. 直角三角形の合同定理の存在価値は何でしょうか？
答. 直角三角形は，他の三角形より扱う頻度が高いということです.
問. 今まで習った写像の他にもまだ写像はあるのですか？
答. もちろんあります．たくさんあります．いくらでもあります．では，質問です．自然数全体の集合 $\mathbf{N}$ から自然数全体の集合 $\mathbf{N}$ への写像はいくつありますか？
問. $x^2+y^2=4$ と $x^2-4x+y^2-4y=16$ という２円の交点を通る円は，$(x^2+y^2-4)+k(x^2-4x+y^2-4y-16)=0$ という式で表すと高校時代に習いましたが，この式の k は何ですか？
答. パラメーターです．２円も交点が２点あると，それを通る円はたくさんあるので，それをすべて表すには，必ずパラメーターが必要になります.
問. ハミルトン力学やハミルトンの４元数とはどんなものですか？それにしても昔の人は数学者なのに物理学者でもあったりとすごい人ばかりですね.
答. ハミルトン力学については,「解析力学」という題名の本には必ず書いてあります．ハミルトンの４元数とは，$a+bi+cj+dk$ $(a,b,c,d$ は実数$)$ という形の数で，i,j,k は，$i^2=-1, j^2=-1, k^2=-1, ij=-ji=k, jk=-kj=i, ki=-ik=j$ という計算規則に従います．ところで，別に Hamilton 先生は数学とか物理とかの区別を意識はしていなかったと思います．良い仕事をしたので，結果的に後世のいろいろな分野に影響を与えたのだと思います．現代では,「専門でないから知りませんもん」という人が多いので注意しましょう.
問. 平面幾何を工学などに応用するとしたらどのように使えるのでしょうか？
答. CG がまず応用例として思い浮かびます．工系の数学シリーズの「形状 CAD と図形の数学」という本を参考にしてください.
問. 「知恵の輪」は数学者が考えるのですか？
答. 知りません．でも，知恵の輪は，幾何で言うところの「アイソメトリー」(isometry) という考え方と関係しますね.
問. オイラーとは何者なんでしょう？
答. オイラー (Euler) は，ガウス (Gauss) と並んで，史上最大の数学者と呼ばれている人です．スイス出身です．オイラーの定数，オイラー標数，オイラー無限積... などで有名です．オイラー全集は何十巻も出版されていますが，未だに未完とのこと．昔，スイスに行って，オイラーの肖像が紙幣にのっているので，さすがだなと思いました．そして，日本では，福沢諭吉，夏目漱石... いまだ「理数系は社会的に認められていない」と痛感しました.
問. 回答書に，ブール代数とか，フォン・ノイマンといった名前を見ると，色々な人が幾何をやっているもんだと思います．件 (くだん) の人々は今日のコンピューターデクノロジーの基礎部分でかなり大きな仕事をしたそうですが，やはり幾何は現代科学にかかせないものなのかも... 実は.
答. どの分野にせよ，良い仕事をしている人には，幾何のセンスのある人が多いようです．不思議ですね.
問. 高次元空間というものは，図で表せない，頭の中で考えていく世界ですか？
答. もちろんそうです．図に書いたとしても，頭の中で考えます．どちらかというと，頭の中以外で考えるのは難しいですね.
問. 物質というものは本当は高次元で，現実世界では，それは３次元に射影したものだというのはどうですか？
答. どちらかというと，そのような考え方が現代物理学では常識になっていると思います．キーワードは「物質波」です.
問. この世界は３次元空間ですか？それとも４次元空間ですか？
答. ずばり無限次元空間です．無限次元の情報から，有限個の情報を取り出しているのだと思います.
問. 数学では，化学における「フロギストン説」の場合のように今まで構築してきた理論が雪崩式に崩れてしまう，ということはありえませんか？少なくとも歴史上にそういうことは，数学にはなかったのですか？
答. ありません．論理的な学問なので，たぶん将来も破綻しないでしょう．つまらない理論は，正しいままで，省みられなくなるだけのことです.「老兵は死なず，ただ消え去るのみ」ということです．ところで,「フロギストン説」とは何ですか？
問. 映画を作るとき，ビルなどを倒す場合，小さなモデルを使います．たとえば，$\dfrac{1}{25}$ の大きさのモデルを使った後，正常の速度で放映すると不自然になります．何分の一の速度なら自然になりますか？
答. やはり，$\dfrac{1}{5}$ だと思います．実験してみると良いですね.
問. 平面幾何の世界において，最も重要な式はなんでしょう？
答. 幾何ではやはり「重要な図形」でしょうね．幾何で最も重要な図形は何か？難しいですが，たぶん，この講義で最初に扱った「三角形」でしょう.
問. フラクタルとは一体どんなものでしょうか？
答. 森に行ってください．木を見てください．枝のつき方，葉のつき方を見てください．大きなサイズでのパターンが，小さなサイズにも同じように現れるということが観察されると思います．それが「自己相似性」です．フラクタルとは，おもに「自己相似性」のことを指しています.
問. トポロジーは数学的に確実に発見されたものですか？

答. はいそうです．日本数学会というものがあり，私 (石川) もその会員ですが，日本数学会は１０ぐらいの「分科会」に分れているのですが，その一つに「トポロジー分科会」というものがあります．毎年の夏には，トポロジーシンポジウムというものが開催され，私 (石川) はだいたい参加しています．

問. トポロジーとは，どんな所で使うものなのでしょうか？最近なぜか本の題名に「トポロジー」という言葉が入っているものをよく見ます．例えば「野菜の形をトポロジーで考える」などというものもありましたが，何を言っているのか意味不明でした．

答. そうですね．意味もわからず，流行りの言葉をふりまわす人が多くてこまります．とくに文系の先生に多い．北大の先生にはそんな人はいませんが... でも，野菜のトポロジーというのはおもしろそう (おいしそう) ですね．

問. トポロジーについての参考書があれば紹介してください．

答. いろいろありますが，本格的に勉強するなら，たとえば，松本幸夫著「トポロジー入門」岩波書店，は，標準的な内容がていねいに，わかりやすく書かれた本であるという定評があります．

問. もし人類に視覚が最初から無かったとしたら，幾何学は生まれたでしょうか？(そもそも視覚がなかったら，人類は文明を築くことができたでしょうか．確か，故手塚治虫氏の名作「火の鳥」に出てくる「ムーピー」なる生物と人との混血は，目が見えなくても文明を築きあげていましたが)．

答. 難しい質問ですね．視覚がなくても，空間は認識できるはずだから，空間幾何学は生まれ，そのアナロジーとして，高次元でも無限次元でも理解しようとして,「幾何学」が生まれ，発展すると思いますね．

問. 古典幾何学を理解していないと，現代幾何学をきちんと理解することはむずかしいですか？

答. むずかしくないです．ただし，この講義で説明している部分は，古典幾何と近代幾何と現代幾何の平面幾何にかかわるおもしろそうな部分だけです．たくさんあるうちの一部の内容であることをご承知おきください．

問. 昔の回答に先生はたくさんの定理を見つけたとありますが，どうやって見つけたのですか？特別な才能が必要なのですか？それともやるきと根性があれば見つかるものなのですか？

答. がんばって見つけました．特別な才能が必要です．やる気と根性ももちろん必要です.「めげない性格」も必要です．すべて必要です... このように「うぬぼれ」も必要ということですね．うぬぼれと言えば，この前,「ジャン・レノ」に似ていると言われました．ジョン・レノンではなくてジャン・レノです．最近の僕 (石川) の自慢です．

問. 数学は，この先発展するのでしょうか？

答. 発展すると思います．人類が滅びたら，どこか違う星でやはり数学が発展するでしょう．

問. 「フィールズ賞」とは何ですか？アカデミー賞やグラミー賞，芥川賞，沢村賞と同じ様なものですか？いままで受賞した著名な人はいますか？

答. えーと，ノーベル賞を忘れていますね．フィールズ賞は数学のノーベル賞と呼ばれています．たとえば，広中平佑先生 (現山口大学長) が受賞しました．

問. 図形的 (幾何的) な証明が，いまひとつつかめません．どうしたらこういったものになじめますか？高校の頃にそういった幾何学を学んでいないせいかも知れませんが，何か幾何学的な証明というものがどうにもなじめません．

答. 慣れていないので，なじめないのは当然です．気にしないでください．少しだけ幾何が好きになった，何かおもしろそうなことをやっているな，と少しでも思ってもらえれば，この講義の目的は果たしたと考えます．いかがでしょうか？

問. 時間が余ったらやろうと思っているという「未来の平面幾何」というのも気になります．未来のことなどわからないのでは？

答. 天気予報というのもあります．星占いもあります．将来の希望があります．もちろん，未来が実際どうなるかは誰にもわかりませんが，どうなるか予測すること，どうなってほしいかを考えることは必要であり，楽しいことですね．ところで，道東へ行ってどうやったなら平行線が交わるように見えるのか全く見当もつきません．ちなみに，道東のどこら辺にいけばわかるのですか？という質問をもらいました．サーモンパークあたりはどうでしょうか．また,「はに丸」中で覚えていることですが，ひんべいが黙っているはに丸に「うんとかすんとか言ってくださいよ」と言ったところ，はに丸が「すん！」と答える場面です，という情報をもらいました．ところで，以前から気になっていたのですが，その「すん」とはどういう意味なのでしょうね.「おじゃる丸」のエボシの構造が知りたくてたまりません．また,「伝書ボタル」の名前が，略すと「電ボ」になり漢字が変わるのはなぜですか？「田村カズマ」なのに，T シャツの文字がイニシャルでもない「V」なのはなぜですか？という質問をもらいました．私 (石川) はわかりません．誰か教えてください．それから，ナスカの地上絵が作られた時代には，もう平面幾何が応用されていたのですか？という質問がありました．たぶんそうでしょう．また，そろばん２級までとりましたが，何ら使う機会なく，その腕は落ちました，という情報をもらいました．実は，考える力を養うのに密かに役に立っているのだと思います．また,「レインマン」を見ましたか，天才的な計算能力を持ったお兄さんが登場しますね，という質問を受けました．見ました．レインマンも良かったですが,「フォレスト・ガンプ」も良かったですね．ところで,「ファック」という言葉についてですが，そのときそのときの言った本人の心情などを考えれば，僕にとってはとても広い意味がある言葉だと思います，という意見が寄せられました．わかっています．というか，単なる口癖なのだと思います．現代日本語の「ちょーなになに」とか，語尾上がり言葉などのようなもので，耳障りだ，と言いたかったわけです．それはそうと,「Shade」とか「六角大王」とは，3D-CG を描くソフトです.「六角大王」は Mac 用でフリー版もあります，という情報をもらいました．また,「六角大王」はポリゴンを使ったモデリングソフトで，左右対称の画像を作れます.「Shade」は，personal や Pro 版があり，その人のレベルに合った機能があります．3D 画像には,「光源」や「視点」といった概念があり，幾何学を使うことで表現しているのたと思います，という情報ももらいました．皆さん詳しいですね．ありがとう.「Shade」については， CG アニメーションで使われ，TV の CM でも登場していることを知りました．幾何学は実社会で生かされているのですね．ところで,「六角大王」という名前の由来は，私 (石川) が考えるに，立方体を斜めから見た輪郭が六角形だからか，立方体を平面で切った切り口が六角形だからだと思いますが，いかがでしょう．関係ないですが，以前，中国の長春 (旧満州の首府) の知り合いを訪ねたとき，ごちそう攻めに合い，今日は軽いものにしようと入った「加州牛麺大王」(カルフォルニア・ビーフ・ヌードル・キング) という店で出された大盛の牛肉ラーメンを思い出しました．おいしかったですが，食べ過ぎで帰国してから１週間お腹をこわしました．ところで，私は，京都は詩仙堂，奈良では興福寺の阿修羅像の前が最高の場です．京都へいかれたなら，鴨川をずーっと北へ北へひたすら歩くのもいいものですよ，あと大文字山を登るのもお勧めします．絶景です．という情報が寄せられました．今度，機会があれば試してみます．それから，トポロジーまでは痛みに耐えてよくがんばろうと思います，という決意の言葉をもらいました．頼もしいです．修業時代はみんな耐えているんですね．眠気に耐えてがんばってください．ではまた．