平面幾何の旅・質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 7 (２００１年6月5日) の分

問．「２点を通る直線 $\leftrightarrow$ ２直線の交点」と翻訳される，という意味がわかりません．

答．こんにちは．JR 札幌駅前の家電戦争はすごいですね．さて，回答ですが，双対 (そうつい) の話ですね．これから講義で説明するのですが，たとえると,「鏡の世界」の話です．でもそれは，特別な鏡なので,「あべこべの世界」と考えてもよいかも知れません．あるいは，少し意味が違いますが,「天の邪鬼 (あまのじゃく) の世界」でしょうか.「あべこべの世界」では，もとの世界に直線があったら，点があり，もとの世界に点があったら，直線があると考えます．あべこべの世界での点を，区別するために点 * と書き，あべこべの世界での直線を，直線 * と書くことにします．すると，もとの世界での「２点を通る直線」は，あべこべの世界では「２直線 * を通る点 *」つまり,「２直線 * の交点 *」となります．

問．「無限遠点から成る無限遠直線」とありますが，よく意味がわかりません．

答．地球が球形ではなくて平面だと想像して，その地平線を思い浮かべてください．青い空と，無限に広がる灰色の大地．目が眩むような光景ですが，想像してみてください．すると，目の高さから下は全部灰色，目の高さから上は全部青色になっていますね．灰色の擂り鉢 (すりばち) の中にいる感じです．では，丁度目の高さの部分「地平線」は何色でしょうか？その方向には地面はないから，空ですね．青色です．それが「無限遠点から成る無限遠直線」です．(ただし，前後の区別はつけません)．

問．無限遠点は複数個あるのですか？

答．そうです．無限個あります．

問．参考資料 No.1 の「残りの部分は，Π と ($\mathbf{R}^3$ の中で) 平行な直線からなる」の部分がまったく謎です．小学生にもわかるように教えてください．

答．ふつうの平面を理解するにもそれなりの抽象能力が必要なので，小学生に射影平面をわかってもらうのは，その小学生が大天才でない限り，たぶん無理だと思います．でも，なるべくわかりやすく説明すると，上の回答で，Π は灰色の大地です．(前後の区別をつけないことにすると) 灰色の大地が見えない方向は，水平線の方向ですね．それが「残りの部分」で，水平に見た視線からなり，その視線は，大地に対して平行になっているということです．

問．カメの話で，同一視するのは，その円周すべてですか，それとも直径を引いたときの２点ですか？

答．すべての方向の直径を引いて，その端点を同一視します．対心点を同一視します．すべての対心点の組について同一視します．

問．射影平面での直線がよくわかりません．

答．「射影直線」のことですね．$\mathbf{R}^3$ の原点を通る平面を指定したとき (もちろんそのような平面はたくさんありますが) その平面に沿った視線の全体というのが射影直線の定義です．

問．ガイドに「射影平面の座標は，その比率だけが問題だから…」とありますが，その比率とは何の比率ですか？

答．「視線の方向ベクトルの成分の比率」です.「連比」です．３つの数の比です．射影平面上の点は，$\mathbf{R}^3$ の原点を通る直線 (視線) というのが定義ですが，その視線は，方向ベクトル (x_0, y_0, z_0) を与えると指定されます．その際，方向ベクトルは零ベクトルではありません．零ベクトル以外の３次元ベクトルを与えると，射影平面の点が指定できます．そして，別の方向ベクトル (x_0', y_0', z_0') が同じ視線を定めるのは，連比が等しいとき，$x_0 : y_0 : z_0 = x_0' : y_0' : z_0'$ (左の数をいっせいに何倍かしたら右に等しい) というときですね．

問．$\mathbf{R}^3$ の１次変換の式で，$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ のときがわかりません．

答．良いところに気がつきましたね．方向ベクトルなので，(x_0, y_0, z_0) は零ベクトル以外を対象としています．

問．直線 ℓ 上の３点 $A, B, A+B$ と言っているのに，どうして，黒板での説明の $A, B, A+B$ は一直線上にないのですか？もしかして，ここでいう直線とは射影直線なのですか？

答．そうです．射影直線です．参考資料 No.2 の１ページ目の最終行を見てください．

問．$\alpha A' + \beta B' = \gamma(A' + B')$ となるスカラー γ があるはず，とはどういうことですか？「ある」と言い切っても間違いではないような気がします．

答．もちろんそうです．数学では，いい加減なことは絶対許されません.「あるはず」ということは，もちろん「ある」ということです．それ以外の意味はまったくありません．単に強調して表現しているに過ぎません．

問．$\alpha A' + \beta B' = \gamma(A' + B')$ で，A', B' が１次独立だから $\alpha = \beta = \gamma$ が成り立つ，とありますが，なぜですか？

答．$\alpha A' + \beta B' = \gamma(A' + B')$ を整理すると，$(\alpha - \gamma)A' + (\beta - \gamma)B' = 0$ となりますね．A', B' が１次独立だから，$\alpha - \gamma = 0, \beta - \gamma = 0$ になりますね．だから，$\alpha = \gamma, \beta = \gamma$ となります．

問．「複比」についてよくわかりませんでした．何と何の比なのですか？

答．ここでは紹介しませんが，比の形であらわされるから付けられた名前ですが，とにかく,「射影直線上の４点で定まる比」と考えてください．

問．$A + \lambda B$ と書いたときの λ は複比とは呼ばないのですか？

答．良い質問ですね．じつは，複比は，４点の順番を入れ替えると変わってきます．(たとえば，A と B を入れ替えると)．講義で説明したのは，あくまで，$A, B, A+B$, もう１点 という順番で考えています．

問．複比の定義のところで，$\lambda A + B$ によって表される４点目の存在範囲は，半平面になるということですか？

答．半直線ではなく直線で考えているので，平面をカバーします．(その平面は，$\mathbf{R}^3$ で考えているので，射影直線「直線 AB」上のすべての点が表現できるということです．)

問．黒板に書いた，３次元空間の直線のグラフは，平面でいう直線 ℓ や m のようなものであるのですか？

答． 違います．３次元空間の原点を通る直線は，射影平面でいうと，点を表しています．

問． 配景写像という用語の意味がわかりません．

答．直線 ℓ から直線 m への，点 P を中心とした配景写像とは，直線 ℓ から直線 m への「写像」であって，ℓ 上の各点 Q に対し，直線 QP を考え，その直線と m の交点を R としたとき，点 Q に対し，点 R を対応させる規則のことです．(ここでいう直線は，射影直線です)．

問． 配景写像ではない射影の例を見せてほしいです．

答． ２直線の交点を動かせば配景写像ではありません．別な直線への配景写像を１回経由して，そこから配景写像を続ければ交点を動かすことができますね．それは配景写像ではありません．

問． 配景写像が 0 回で射影になる場合は，どんな場合ですか？直線 ℓ と m が一致するときですか？

答． そうです．２直線が一致して，しかも点をまったく動かさないときときです．(恒等写像)．

問． 射影幾何の基本定理の内容がよく分かりません．

答． 一般に直線から直線への「写像」というのは，かなりたくさんあります．今，曲がらないけれど伸び縮み自由な蛇腹 (じゃばら) を想像してください．少し気味悪いかもしれませんが．その蛇腹を伸び縮みさせて置き場所をかえることが直線から直線への「連続写像」に該当します．(途中を切ったりしていないので連続であると言います)．その場合は，少し考えるとわかると思いますが，３点どころか，４点，５点の場所をあらかじめ決めても途中の位置は自由にできますね．そのように一般の写像ならたくさんあるわけです．**射影は写像の一種**ですが，それほど自由はきかないけれど，３点までは自由に指定できて，しかも３点の行き先を決めれば，途中は，(射影であるということから) すべて決まってしまうということです．

問．「直線から直線への射影」では，なぜ３点の行き先で決まるのですか？２点で考えると何が足りないのですか？

答． ２点ではデータが足りません．いわゆる「合同変換」なら，確かに２点を指定すれば決まってしまうのですが，射影変換は，もう少し自由度が高いのです．２直線 ℓ と m を想像してください．たとえば，その交点 A と，ℓ 上の点 B と m 上の点 B' について，A を A に，B を B' に写すような ℓ から m への射影にはどういうものがあるか想像してみましょう．B と B' を通る直線上の点 P を中心とした ℓ から m への配景写像は，P が直線 BB' 上にあれば，A を A に，B を B' に写すので，１つには定まりませんね．(図を描きながら考えてみてください)．

問． 直線から直線への３点の射影がなぜただ１つなのか分かりません．

答． たぶん誤解があると思うのですが,「直線から直線への射影という特殊な写像は，３点の行き先を指定すれば決まってしまう」という意味です．射影の決定のためには３点観測で十分，という意味です．

問． 射影幾何の基本定理の説明では，２直線の交わる点と，その両側の点を３点を取ると説明できません．

答． 鋭いですね．良い質問です．交点を交点に写すような射影は，配景写像で実現できてしまうので，言及しなかったと考えてください．説明不足でした．

問．「直線 ℓ から m への射影が，ℓ と m の交点を動かさないならば，配景写像である」の逆，つまり「配景写像では ℓ と m の交点は動かない」も成り立ちますよね．

答． 成り立ちます．

問． 配景写像と単なる写像との違いは，２直線の交点を動かすか動かさないか，ということであると理解してよいのですか？

答．「単なる写像」ではなくて,「射影」と改めれば，そう理解してよいです.「２直線の交点を動かさないような射影が配景写像である」ということです．

問． ガイド No.2 の「直線 PQ は $(x_0, y_0, z_0) + t(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ で表される．ここで，t は媒介変数 (パラメータ)．直線 PQ と直線 m の交点が R だから，$a'(x_0 + t(x - x_0)) + b'(y_0 + t(y - y_0)) + c'(z_0 + t(z - z_0)) = 0$」の部分がわかりません．

答． 立体的な図を描きながら考えるとよいと思いますが，まず，空間ベクトル $\mathbf{P}(x_0, y_0, z_0)$ を描いてください．(零ベクトルではないもの)．それから３次元空間の原点を通る平面で，ベクトル (x_0, y_0, z_0) を含まないものを描いてください．またその平面上にない空間ベクトル $\mathbf{Q}(x, y, z)$ を描いてください．それから差のベクトル $\mathbf{Q} - \mathbf{P}$: $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ を描いてください．できましたか？それで準備完了です．$(x_0, y_0, z_0) + t(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ は，$\mathbf{P}$ の終点と $\mathbf{Q}$ の終点を通る空間直線になりましたね．その直線方向の視線の全体が射影直線 PQ になるわけです．ここで，$\mathbf{P}$ 方向に対応する射影平面の点が P で，$\mathbf{Q}$ 方向に対応する射影平面の点が Q で，途中に出てきた平面の方程式が，$a'x + b'y + c'z = 0$ です．

問．「任意の図形と，直線 ℓ 上にある図形は，直線 ℓ にを軸として配景的である」というのは成り立ちますか？

答． 鋭いですね．確かに成り立ちます．でも，重要なのは，両方の図形が ℓ 上にはない場合です．

問．「直線を軸として配景的」の定義で，対の２直線は，どの組み合わせでも良いのですか？

答． 良いです．でも重要なのは，やはり，同じつながり方をした組み合わせに関するものです．

問． プリントを見て思ったのですが，ある２つの図形が相似ならば，それらの図形は，ある点を中心として配景的であるとは言えないでしょうか？

答． 言えません．配景的かどうかは,「置きかた」も関係するので，相似であっても，たとえば少し回転して置けば，配景的でなくなってしまいます．

問． 配景的な２つの平面図形は相似でなければならないのですか？

答． そんなことはありません．たとえ話ですが，正三角形のななめから落とした影は (配景的と考えれますが) 正三角形ではなくなります．

問．「配景的」とは,「カベにうつった影」あるいは「鏡に写った虚像」のようなものと考えて良いのでしょうか？

答． 良いです．ただし，講義で扱っているのはあくまで平面図形ですが．

問． ユークリッド幾何と射影平面は全く別のものと考えて良いのに，デザルグやパップス，パスカルの定理を射影幾何で証明するということは，なぜできるのですか？

答． 同じ名前がついていても，ユークリッド幾何と射影幾何とでは全く違う定理であると考えてください．射影幾何では，射影平面の上で，射影直線や射影平面の点に関する定理を扱っているので，ユークリッド幾何での定理とは当然別のものです．別のものですが，普通の平面は射影平面に埋め込まれ，たとえば射影幾何でのデザルグの定理からユークリッド幾何でのデザルグの定理が導かれるので，同じ名前を付けたわけです．うまい「たとえ」が思い浮かばないのですが，ザ・タイガースの歌う「花の首飾り」と，井上陽水の歌う「花の首飾り」は，同じ名前がついているけれど，違いますね．それと同じです．

問． なぜデザルグの定理が平面射影幾何の公理となるのですか？定理が公理になるのは不思議な感じがします．

答． 「デザルグの定理」は，この講義で扱っている射影平面の上では成り立つのですが，公理だけからは証明できないし，実際に反例があります．ですから，射影幾何の公理系 I, II, III, IV のもとでは，定理ではないわけです．そのとき定理は定理でなくなった．だから,「デザルグの公理」と呼ぶべきかも知れませんね．

問． 射影幾何では微分や積分を使いますか？もし使うなら例を１つ出してください．

答． 使いません．２次曲線の接線程度のことなら扱いますが... ただし，これから説明する，平面曲線のトポロジーの話では，ガウス指数 (回転数) を考察するのに，微分も積分も使います．

問． 線形性とは何ですか？

答． ベクトルの足し算とスカラー倍が自由にできるということです．写像 (関数，変換) のグラフが線の形をしているということです．１次式で定義されているということです．

問． １次変換の意味がわかりません．

答． 変換式が１次同次式で表される変換です．このような変換 T はその線形性 $T(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = T(\mathbf{x})+T(\mathbf{x}'), T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x})$ で特徴付けられるので，線形変換とも呼びます．

問． 関数と写像は関係ないものなのでしょうか？

答． 関係ないどころか，関数は写像の一種です．現代数学では，すべてのものは,「集合と写像」の言葉で表されます．

問． 原点という考えは，どういう時につかうのですか？

答． 座標を決めているユークリッド空間 (デカルト空間とも言う) で使います，射影平面全体を考察しているとき，原点はありません (考えません)．

問． なぜ円錐を平面で切ると２次曲線になるのですか？また，どんな２次曲線でも円錐と平面で表されますか．

答． 円錐が「２次曲面」(２次式で表される曲面) だからです．もちろん，その平面と円錐の上にあるような曲線しか表されないのですが，２次曲線は，楕円，放物線，双曲線，(それに，２直線，と，平面上で $x^2 + y^2 = 0$ で表されるような１点，と空集合) という種類がありますが，平行な２直線と空集合以外は，すべて円錐と平面で表されますね．(ここでいう平面はふつうの平面です)．

問． 「図形と数は密接な関係がある」とありましたが，言葉が抽象的すぎてよくわかりません．

答． 具体的に，一辺の長さが１の正方形の対角線の長さは，無理数がないと表されません．また，講義で扱っている１次変換の定義式はすべて数で表されていますね．複比も数です．これでどうでしょうか？

問． ピークの公式を証明するためのヒントがほしいです．平面上に格子点があります．これらの点を結んでできる図形の面積は，$\dfrac{1}{2}\times$ (通った点の数) $-1+$ (図形の内部にある点の数) と表すことができる，というものです．

答． 私 (石川) はわかりませんが，何か情報があれば教えてください．

問． 僕は物工の学生なので，図学の授業があるのですが，そこで使われているのは，おそらく平行に光りを当てて考えているので，ユークリッドの方に近いものだと思います．中学の時とかに使っていたキャビネット図は大きくわけるとどちらになるのでしょうか？

答． どちら，というのは，ユークリッド幾何的か射影幾何的か，ということですね．場合によると思われます．キャビネットを描く場合でも，遠近感 (立体感) を出したいときは，遠くのものを小さく描くので，射影幾何的になります.「寸法」を正確に平面に図示したいときは，当然ユークリッド幾何的に描くことになると思います．ところで,「物工」とは，物理工学のことですか？

問． 今日のテレビゲーム等のプログラムの中で射影幾何は使われていないのですか？また使えますか？

答． 詳しくは知りませんが，コンピュータ・グラフィックスの世界では射影幾何が不可欠なので，テレビゲームでも，基礎的な部分で使われていると思います．これからは，さらに応用できると思うので，ぜひ挑戦してください．ところで，コンピュータ・グラフィック界の TEX と呼ばれているソフト「Pavray」(つづりが違うかも知れませんが) のことを知っていますか？

問． 「射影幾何 = ガウスの非ユークリッド幾何」なのでしょうか？

答． 違います．ガウスの非ユークリッド幾何では「長さ」という概念が中心ですが，射影幾何では，直線だけが出てきて,「長さ」は考えていないですね．

問． 平行線が２点以上の交点をもつ世界は無いのですか？

答． たとえば，球面上で，大円を直線とみなせば，２つの直線は，２点で交わります．その２点は，丁度「対心点」になるので，その２点を同一視すると，射影平面が得られ，２つの直線が１点で交わると考えられます．

問． ローレンツ変換がよく分かりません．

答． (x, y, z, t) 空間の変換です．４次元空間の特別な形をした変換です．

問． ４次元とはどんなものなのでしょうか？そう言えば，アニメ「ドラエもん」の道具の１つに「４次元ポケッ

ト」というのがありますよね．あのポケットの設定は，厳密に「４次元」になっているのですか？

答．時間を飛び越えるということで，４次元なのではないでしょうか？

問．複素数平面を２つ組み合わせると４次元になりますか？

答．なります．$\mathbf{C}^2$ と表しますが，これは，実次元が４次元です．

問．「マイナス次元」とか「虚数次元」などという考え方はあるのでしょうか？それから，複素数を n 次元で考えても面白いと思います．

答．「マイナス次元」とか「虚数次元」は，今のところ使われていないと思います．複素数を n 次元で考えることは，数学では日常茶飯事です．

問．テニスボールを裏返すことは数式で表されますか？

答．質問の主旨とあっているかどうかわかりませんが，実は球面を裏返す (自己交差は許すが，角 (かど) を作らないで裏返す) ということは，可能であることが証明されています．微分トポロジーという分野で有名な話です．実際に裏返す過程を写したビデオも市販されています．

問．$0 \times \infty = 1$ の両辺に 0 を掛けると $1 = 0$ が導かれるとはどういうことですか？

答．前提として不合理なことを仮定しているので，不合理な結論が導かれてしまう，ということです．仮に $0\times\infty = 1$ という等式が成り立ったとすると，$0 \times (0 \times \infty) = (0 \times 0) \times \infty = 0 \times \infty = 1$ が $0 \times 1 = 0$ に等しいということが導かれるということです．

問．平面を埋める方法は３種類あるそうですが，有名な話でしょうか？

答．たぶん，そのうちの１種類は「ペンローズのタイル張り」のことだと思います．

問．クラインの壷の模型は実際に作ることが可能なのですか？

答．可能です．自己交差は許した模型ですが．

問．数直線上の点と実数は１対１対応しますか？

答．対応します．

問．$\sqrt{n}$ が無理数である条件を考えてみました．n が無理数である，または，n が平方数でない，のどちらかが言えればよい，と考えたのですが，いかがでしょう．

答．間違いではないですが，$\sqrt{n}$ が無理数であるような自然数 n を特徴づける問題なので，はじめから n は自然数としてください．それから，条件をより明確に書いた方が良いと思います．n が「平方数でない」という条件は，n を素因数分解したとき，どういう条件になるでしょうか？

問．π とは一体何なのですか？

答．単位円の円周の長さの $\dfrac{1}{2}$ です．

問．ケーリーさんが何をやった人なのか良く知りません，いったいどんな人なのですか？

答．ケーリー先生を知らないなんて信じられませんね．１９世紀に活躍した数学者であり法律家です．全部で十数巻からなるケーリー全集が出版されています．ケーリー・ハミルトンの定理の他，ケーリー変換，ケーリーの８元数，超行列式，など数学の広い分野で，オリジナルな多くの業績を挙げている人です．ちなみに，私 (石川) の研究室の Mac のコンピュータの名前は Cayley 君です．

問．平面幾何という学問は，昔の日本にもあったのですか？なんとなく日本人向きの学問ではないような気がします．

答．昔の「算額」(和算で，難問を寺などの額に飾って解けるかどうかを競ったもの) には幾何の問題が多かったので，江戸時代も盛んだったと思います．私 (石川) は日本人向きの学問だと思っています．

問．和算とは何ですか？日本の寺子屋が和算の発展に貢献したと聞いたような気がします．

答．江戸時代に発展した日本オリジナルの数学 (算数?) です．寺子屋とは現代でいうと大学のことでしょうか．

問．詩人で数学者のポール・ヴァレリーが現実世界から全く異なる世界を作り出すものとして「詩」と「幾何学」を挙げています．私が数学について感じる最も大きな魅力は，ヴァレリーのいう「創造的な学問」であるということです．科学の中でも数学以外のものは「自然のしくみ」を解析する (アインシュタイン流に言えば「悪魔の秘密を解く」でしょうか) だけですが，数学に本当に「創造的」な面があるのなら，それは数学のみが持つ大きな魅力であると思います．

答．自然のしくみを解析することも十分創造的だと思いますし，数学にも，もちろん創造的な面がたくさんあります．私見ですが，どんな分野にも創造的な面はあると思います．物事を真摯に (手を抜かないで) 考えて生活していけば，当然いろいろ工夫するわけで，その積み重ねが，大きな飛躍につながるわけですね．何もしないで，地道な努力をしないで，手抜きをしていくと，絶対に創造的はことはできませんね．どの分野でも．

問．参考資料の 2-1 の概念の考察と，2-2 以降のつながりがはっきりしません．１.「概念がよく分からずに，その後の実践が分かるというのは，結局何もわかっていない」．２.「実践を考えているうちに概念の必要性がわかるから，そのままでよい」．のどちらがより言えるのですか？

答．２です．一言付け加えれば，わかろうと努力しながら，わからないといういま状態に耐える能力 (ある種のしたたかさ) が必要ですね．

問．いまだに射影幾何というものが頭の中にイメージできません．この講義の内容が理解できないことが不安でたまりません．

答．そのうちにできるようになりますよ．いま理解できなくても全然平気です．ちなみに，北大数学教室のホームページ http//www.math.sci.hokudai.ac.jp/ の教官紹介を参考にしてください．ところで，はに丸くんの馬の名は「ひんべい」だと教えてもらいました.「ひひーん」ということですね．納得しました．ではまた．