平面幾何の旅・質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. 6 (２００１年5月２２日) の分

問． $\mathbf{R}^3$ の原点に立って，空間内にあるスクリーンを見ているとします．(スクリーンは無限に広い)．スクリーン上に平行線 ℓ と m を映すと，原点に立っている人には，ℓ, m が平行であるにもかかわらず，無限遠で交わっているように見えますね．これが「平行線が交わる」ということですか？これだと,「射影平面上の点」が「原点に立った人の視線」に対応するので，射影幾何がぐっと身近になると思うのですが，合っていますか？

答． こんにちは．出張で充電してきました．京都に行ってきたのですが，札幌の方が，過ごしやすいシーズンになってきましたね．さて，回答ですが，合っています．その通り，我が意を得たりです．というより，私 (石川) の説明より分かりやすいですね．講義では，射影平面の点は，３次元空間の原点を通る直線であると説明し,「光線」でたとえましたが,「視線」と言ったほうが，感じがでますね．ただし，普通に視線と考えると，平行線が，(振り返れば) 前後の２点で交わるように見えます．でも,「直線は１点で交わる」ほうが，いままでの平面幾何と折り合いがよいので，前後の交点は「同一視します」．(これは，射影平面の点である直線には向きを考えないということに該当します)．したがって，射影平面の点は「前後の区別がつかない視線」であると言えます．

問． xyz 空間 $\mathbf{R}^3$ で原点を通る直線１つ１つが射影平面の点ということでしたが，その意味がわかりません．

答． 原点から見たら，原点を通る直線は点に見えますね．射影平面は直線 (視線) の集合です．

問． 射影平面の世界では，必ず点で見えるのですか？原点で人が星を見ているとして，次に人が歩いていったらどうなるのですか？

答． 人は歩きません．

問． なぜ無限遠点は１つの直線になるのですか？

答． 無限遠点たちは「無限遠直線」と呼ばれる射影直線を形成します．視線で言うと，水平方向の (スクリーンと平行な) 視線が，射影直線になりますね．これです．ちなみに，射影直線は，どの場合でも，普通の直線に，１点を余分に付けくわえたものになります．

問．「２つの射影直線は必ず１点で交わる」とありますが,「必ず」ですか？交わらないことはないのですか？

答． 必ず交わります．

問． ２つの射影直線は必ず１点で交わる，とありますが,「２つの平面は必ず１つの直線で交わる」と混乱している私をどうにかしてください．

答． 混乱していません．というのは，射影直線とは，$\mathbf{R}^3$ 内の原点を通る平面があって，その上にある原点を通る直線たちからなる $\mathbf{R}P^2$ の部分集合です．平面を指定すれば，その上の直線は，方向によって１次元の自由度を持ちます．もう１つ平面をとれば，別の射影直線が決まります．これらの２つの射影直線の「交点」とは何でしょう．射影直線は,「直線のあつまり」なので，両方に共通している直線です．ですから,「$\mathbf{R}^3$ の原点を通る２つの平面は必ず１つの直線で交わる」ということがすなわち,「２つの射影直線は必ず１点で交わる」という意味なのです．

問． 射影平面がイメージできません．

答． 原点から見た視線の全体ですが，それをイメージする１つの方法は，全方向型のプラネタリウムを想像することです．あるいは「宙づりになった自分」を想像してください．しかも，前後の区別はつかないとします．つまり，前に見える映像と，真後ろにある映像は，原点に対して完全に対称であると想像してください．すると，射影平面は，球面を，その対心点どうしを同一視して得られる２次元の空間とイメージできます.「対心点」とは，原点に関して対称な点を言います．日本とブラジルです．ただしその際，曲り具合は，気にしないでください．気にするなと言われても，気になると思いますが，気にしないでください．ところで，射影平面には,「メビウスの帯」が隠れています．どこに隠れているでしょうか？

問．「かめ」の絵がありますが，どうしてワープをするのですか？”カメとワープ”の絵は何を言いたいのですか？

答． 射影平面の分かりやすい理解の仕方を表す図です．昔の人の世界観で，亀の甲羅の上に乗っている円盤というものがありました．それでは,「世界の縁 (ふち)」があることになります．もちろん，世界の果 (はて) があっても悪くはないのですが，すこし危険なので，世界のはてまで行ったら，反対側に瞬間移動することにすると，閉じた世界ができます．それが射影平面です．上の質問の回答との関係は，亀の甲羅 (円盤) を，球面の半分 (半球) と思えばよいです．

問． なぜ射影平面は”平面”なのに３次元で考えるのですか？

答． 次元を上げると，無限遠点が導入できるからです．２次元のままだと，そんな余裕はないのですが，３次元で考えれば，余裕ができるわけです．カバンに「若干の余裕」ができるわけです．

問． 射影平面は３次元ですか？

答． ２次元です．射影平面自体は２次元です．それを３次元空間を介して理解しようとしているわけです．

問． 射影平面を $\mathbf{R}P^2$ と書くそうですが，$\mathbf{R}$ や P は何の略ですか？

答． $\mathbf{R}$ は real の頭文字，P は projective の頭文字，2 は次元を表しています．

問． 無限遠点とは「無限に遠くまで続く点」と読んで字のごとく解釈してよいのでしょうか？

答． よくありません.「続く」というのはどこにも書いていません．”無限遠続点”ではありません．本当に文字通り,「無限に遠くの点」と解釈してください．

問． 配景写像の中心は，どのように決めるのですか？

答． 考えている２直線の上になければ，どこにとっても配景写像が考えられます．

問． 配景写像の中心の点が，片方の直線上にあった場合，その写像はどうなるのでしょうか？

答． 中心は，直線上にはない点を選ばなくてはいけません．

問． 点 O をはさんで左右反対に図形があっても配景的というのですか？

答． そうです．定義のとおりです．

問． 配景写像をいくつか続けたものが射影とありましたが，何回目くらいから射影と呼べるのですか？

答． 0 回目からです．何もしないこと (恒等写像) も，射影のうちに入ります．また，配景写像も射影の一種です．

問．「何度も配景写像を続ける事を射影と呼ぶ」と書いてありますが，一度配景写像をすることと本質的に同じこと

ではないのですか？

答． 違います．配景写像なら，２直線の交点は動かないのですが，一般の射影では，そのようなことはありません．

問． 射影するときに，交点が現れない場合はそうなるのでしょうか？平行だと配景写像ができないと思います．配景写像も何度も繰り返していくうちに，途中で直線と平行になり，無限遠直線となってしまったとします．それから配景写像というものを続けていくことができないと思うのですが，どうするのですか？

答． よい質問ですね．そのために射影平面で考えているわけです．射影平面では，２直線には必ず交点があることに注意しましょう．さらに，射影平面上では，無限遠直線も射影直線であり，普通の直線と同じ性質をもちます．ですから，”あたかも”普通の平面の上と同じように考えられます．

問． ユークリッド幾何では考えられなくて射影幾何ならできるというものが，何かあるのですか？ユークリッド幾何と射影幾何には優劣があるのですか？

答． 「平行な」２直線の交点は，ユークリッド幾何では考えられません．したがって，配景写像も (例外が出てきて) 考えらません．でも，ユークリッド幾何と射影幾何に優劣はありません.「理論」はカバンにたとえられます．穴があいていてはいけません．小さなカバン，大きなカバン，実用的なカバン，格好良いカバン，といろいろあります．どれがよいかは，何を運ぶか，どこに持っていくかによって変わってくるわけです，

問． ユークリッド幾何は不完全だったのですか？

答． ユークリッド幾何は完全です．いままで証明した定理も，例外のないように平行になる場合も詳しくのべて，証明も，場合分けを詳しくすることを厭 (いと) わなければ完璧にできます．それはそれとして，射影幾何で扱えば，単純に述べられ，簡単に証明できる定理がある，ということも確かです．

問． ユークリッドの諸公理は，近似的にしか成り立たないのはなぜですか？

答． そんなことはありません．公理は「成り立つ」ものではなく,「大前提」です．

問． 「平行」の定義は？

答． ユークリッド幾何では，２直線が平行とは，交わらないことです．射影幾何では，平行という概念は定義しません．ちなみに，射影平面上では，どの２直線 (射影直線) も交わります．

問． 平行という概念がないはずなのに，スクリーンと平行な直線は交わらないというのはどういう事ですか？

答． 鋭いですね．３次元空間で平行と言っているのは，そこではユークリッドの立体幾何の言葉を使っているわけです．立体幾何は補助的に使ったけれど，射影平面では平行ということは考えません (考えられません)．

問． 参考資料 2-1 の男の子の絵は配景写像ですか？

答． そうです．正確には，球面ではなく平面に写せば，３次元空間での配景写像ですね．ところで，なぜ，女の子ではなく，男の子とわかったのでしょうか？

問． 射影幾何が誕生した背景が知りたいです．

答． 1812 年にロシア遠征したナポレオン軍の兵隊だったポンスレという人が，ロシアの捕虜になり，牢獄の中で暇だったので射影幾何を見つけたという話があります．たぶん，牢獄にはコンパスはなく，小さな窓から入る太陽の光線だけがあったからでしょうか．それはともかく，遅かれ早かれ射影幾何が作られる歴史的必然であったと思います．

問． 地球の経線は赤道上では平行ですが，２極点では交わっています．このことから，球の表面の２次元平面における直線というものは射影幾何の範囲の話なのですか？

答． ある意味でそうですね．

問． なぜ授業では曲線は扱わないのでしょうか？曲線の役割は大きく，直線や射影だけなら，ちょっと興味が低くなります．

答． ２次曲線はこの講義の範囲で扱えます．

問． ３次元で平面が交わらない時，４次元にすると交わる場合はあるのですか？

答． ３次元射影空間を考えると，無限遠で交わると考えられます．

問． 正射影ベクトルと射影は関係ありますか？

答． 正射影は，射影の中心が無限遠点の場合と考えられます．

問． 「写像」という言葉の意味は何ですか？

答． 「像を写す」という意味です．集合 X (講義では直線を形成する点集合) から集合 Y (講義では，これも直線を形成する点集合) への写像という言い方をしますが，それは，集合 X のそれぞれの要素に対して，集合 Y の１つの要素を対応させる規則のことです．X の要素 (幾何では，点とも呼ぶ) x に対して，Y の要素 (幾何では，点とも呼ぶ) y が対応する場合 $y = f(x)$ で，その写像 (規則) を表します．その典型的な例が，配景写像です．

問． 僕は理学部数理系で数学序論の講義に出ているのですが，そこで集合と写像の基本的性質について学びましたが，幾何での写像とは全く関係ないのでしょうか？

答． 関係ないどころか，まったく同じものです．写像ということばは「像を写す」ということで，もともと幾何の配景写像や射影から抽象化された概念です．

問． 「直線」は２点できまる気がします．

答． もちろんそうです．講義で説明しているのは，直線から直線への射影が３点の行き先できまる，ということです．

問． 射影幾何で，直線から直線への射影は３点できまる，ということの説明がよくわかりません．やはり，３点あると，カメラの三脚のように安定するからなのかと思いました．

答． そうです．関係があります．講義で説明します．

問． 配景写像の延長のような考え方ですが，幾何学の中で,「面から面への写像」を意識することはありますか？

答． もちろんあります．何でも考えます．

問． 今やっている射影は，地図にある射影図に使われているものですか？

答． それは立体射影ですね．考え方は類似していますが，この講義の射影は，直線を直線に射影しています．

問． 複素平面みたいな射影平面はありますか？

答． 複素射影直線がそれに該当すると思います．

問． 射影幾何は図学に近い分野ですか？

答． 図学の基礎になる数学理論であると言えます.「形状 CAD と図形の科学」(工系の数学シリーズ) という題名の

本がありますが，そこには，射影幾何が詳しく解説されています．ちなみに，CAD とは computer aided design の略です．

問． 参考資料に「射影幾何ができたときは，線形代数がありませんでした」とありますが，当時は射影幾何を証明したり理解するのに，どのような数学を使っていたのですか？

答． デカルト幾何 (解析幾何，座標幾何) でしょう．線形代数というものはなかったけれど，現在のわれわれより遥かに豊富な幾何の技術を持っていたようです．

問． 一次変換とは何でしょうか？正則一次変換とは何ですか？

答． 線形変換とも言います．線形性をもつ変換です．行列を使って表されるものです．正則１次変換とは，正則行列で表される１次変換のことです．このとき，線形性から，直線は直線に，平面は平面に移されます．

問． 一次変換の有用性とは何ですか？

答． 幾何学ではもちろんのこと，数列，微分方程式，力学系，統計，数理経済学，など，いろいろな分野で当たり前のように使われる基本的な概念です．

問． 円錐を平面で切った時に直線ができるのは円錐曲線の例外ですか？

答． なるほど，２本の直線が切り口にでる場合がありますね．それも円錐曲線の一種です．この講義では，円錐曲線とは言わず,「２次曲線」と呼びますが，２本の直線は，２次曲線の仲間に入れます．そして，楕円や双曲線や放物線たちを,「真の２次曲線」と呼びます．

問． 立体幾何に強くなる方法はありますか？

答． 街を歩いているとき，建築物をよく観察すると良いかもしれませんね．

問． 「立体幾何」独特の定理や考え方などがあったら教えてください．

答． 代表的なのは「三垂線の定理」ですが，これは知っていますか？

問． 「点 C は比 $\dfrac{AC}{CB}$ で決まる」について，符号つきなのがわかりません．

答． 符号なしで考えると，たとえば，$\dfrac{AC}{CB}$ が 2 になる点 C は，２箇所ありますね．AB の内点であって，３分点のうち，B に近い方と，AB の外点であって，B に関して A と対称な点の２つです．このように，符号を考えないと C の位置が決まらないわけです．ちなみに，直線 AB 上に A が原点で，B が 1 になるように座標をとるとき，C の座標を y とすると，$\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{y}{1-y}$ と表されます．符号を考えないで，単に長さの比なら，$\left|\dfrac{y}{1-y}\right|$ です．この違いがあります．

問． 直線 AB が $x+y=1$ のとき,「直線 OC の傾きが，$\dfrac{AC}{CB}$ である」の証明がよくわかりません．

答． 直線 AB 上の点 C の座標を (x,y) とおくと，直線 OC の傾きは $\dfrac{y}{x}$ ですね．いま，$x+y=1$ だから，$x=1-y$ なので，$\dfrac{y}{1-y}$ が傾きです．一方，$\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{y}{1-y}$ です．

問． 今日の授業の中の説明や，たしか物理の万有引力のエネルギーのところで用いられている「無限遠点」という概念について今まではなにげなしに，ああ，そうか，と思っていたのですが，よく考えてみると,「はるか遠くの点について考えてみる」というのはわかるのですが，無限遠のところに点がある，しかし，点があるということは限りがあるということになるような気がして，わけがわかりません．あまり考えないほうがよいのでしょうか？

答． 物理で使っているのは，ある種の極限操作をしているということで，実際に「無限遠点」という点を考えているわけではないと思います．

問． 幾何で微分・積分は使いますか？微分積分と線形代数を知っていれば，現代幾何学を十分に理解できます．

答． 使います．どんどん使います．

問． 「公準」とは何ですか？

答． 公理のことです．特にユークリッド幾何の公理は公準と呼ばれることも多いようです．

問． リーマン幾何は射影幾何なのですか？

答． 違います．射影幾何とリーマン幾何は別のものです．リーマン幾何では「長さ」は大切な概念です．

問． 「円の直径と円周の比が一定」とはどのようにして導き出されるのですか？

答． 円周の長さ $L = 2\pi r$ で，その係数 π が半径 r によらない定数であるということですね．半径と円周が比例するということですね．

問． 関数の極限で ε 論法があったのですが，なぜそれが必要なのですか？

答． 素朴な概念でも通用することがありますが，たとえば「一様収束」などを考えるときは，どうしても，そのような高級な言語が必要になります．ハワイに１週間だけ観光旅行に行くにはあいさつ程度の英語で十分ですが，ホームステイするときには，ある程度本格的な英語が必要ですね．

問． 大学では円の定義は高校のそれと違うと聞いています．それによると，丸ではなくても，少し角ばっていても，その定義に従えば円といえるとなっているのですが，そんな円はあるのでしょうか？

答． たぶん位相幾何 (トポロジー) のことでしょう．連続的に円に変形できるもの，たとえば，楕円も，位相幾何の立場では「円」と呼ぶことがあります．この講義でも説明する予定です．

問． 昔，私の読んだ「複雑系 (M. ワールドロップ著，新潮文庫)」という本のなかで，新世代の経済学者が古典派経済学を批判して「古典派経済学のように多くの仮定の上に成り立つ理論は，すべてが数式で説明できるような非常に美しい理論だが，その代わり現実からはかけ離れてしまう」と述べていました．射影幾何では「無限遠点」という現実には存在しないような仮定まで用いられていますが，現実世界にそのようなものが応用できるのでしょうか？

答． 以前にも書きましたが,「平面」も「直線」も現実には存在しません．(存在するというなら，どこにあるか言ってください)．存在しません．では，存在しないのに，われわれはなぜ考えられるのでしょうか？数字の 「$1, 2, 3, \ldots$」も現実には存在しません．でもそれがなければ，みんな困りますね.「無限遠点」もそれと同等です．経済学の問題は，そのような数学を使った「モデル」が「現実」を説明するかどうかを検証する手続きですね．それを怠ってはいけない

ということです．経済学は「論理的な整合性」や「単純さ」や「美しさ」より「現実の経済の説明・予測」が目的の学問なので，数学とは目的が違うと言えます．したがって，数学が応用できるかどうかは皆さんの見識にかかっています．ちなみに,「現実」の経済を説明するのに十分な経済学の理論はまだないと思います．誰か作ってください．ただし，その際,「現実世界」とは何かということをはっきりさせなければいけませんね．軽々しく,「現実」などという経済学者は信用できません．古典派経済学も良くないが，その新世代の経済学者の発言も軽薄ですね．

問．「小数次元」や「５次元以上」はどんな概念なのですか？幾何学というのは図形に関する学問ですよね．図形は目に見えるものですね．しかし，例えば「時間軸」に垂直な直線というのは想像すらできません．

答．小数次元については「フラクタル」という題名の本に書いてあります．５次元以上は，線形代数で習います．(習っています)．ところで，確かに，幾何学は図形に関する学問ですが,「目に見えない図形」も扱います．目に見える図形しか扱えないとしたなら，たとえば，盲目の人は幾何学ができないことになってしまいます．でも，ポントリャーギン (特性類の理論で有名) とかモラン (球面を３次元空間で裏返す簡単な方法を見つけたことで有名) などといった目が見えない偉大な幾何学者がいます．それはともかく，幾何学は目に見えない図形も調べる学問です．そのとき頼りにあるのは,「心の目」つまり想像力です．時間軸に垂直な直線を想像できるように，想像力を鍛えてください．

問．無限とは一体何ですか？無限という概念は幾何からでてきたのですか？

答．そうかも知れません．一言で「無限」と言っても，いろいろな無限がありますね.「数が無限」「空間が無限」「可能性が無限」...「無限大」という言葉も,「数列が無限大に発散する」「$1, 2, 3$ 無限大」「借金が無限大」...「テラスに坐っているとき私は，海を見渡していると人間が，無限大の一部分をとらえたような気になる，と言ったボーアの言葉を繰り返し考えていることが多かった.」(ハイゼンベルグ『部分と全体』から)．とにかく人間が処理できないものを「無限」と呼んだのかもしれませんね．その無限を，数学の対象として明確に扱ったのは，確かに射影幾何が最初かもしれません．

問．宇宙は閉じた３次元空間かもしれないそうですが，どうイメージすればよいのでしょうか？

答．一番想像しやすい閉じた３次元空間の例は，この教室の左右の壁をはり合わせ，前後の壁をはり合わせ，天井と床をはり合わせてできる空間です．(「３次元トーラス」と呼ばれている空間です)．想像できますか？壁に向かってあるいていくと，壁をすり抜け，反対側の壁から出てきます．もちろん，宇宙がどのような空間であるか (どのような空間と考えるのが妥当か) はまだわかっていないようですね．

問．宇宙は現在 26 次元から成り立っていると聞きましたが，本当ですか？

答．そういう理論があるのは確かです．

問．何かの本で数学の不確定性原理というものを読みました．

答．「ゲーデルの不完全性定理」のことだと思います．

問．割り算で，$1 \div 0$ が定義できないというのはどうしてですか？$1 \div 0 = \infty$ で良いと思います．

答．∞ は数ではありません．$1 \div 0$ の意味は,「0 を掛けたら 1 になる数」という単純なものなので．そんな数はないので,「定義しない」わけです．もちろん，$1 \div 0 = \infty$ と定義するのは可能ですが，そうすると，$0 \times \infty = 1$ となり，たとえば両辺に 0 を掛けると，$1 = 0$ が導かれ，すべての自然数が 0 になってしまいます．このように，∞ を数とみなして，整合的な数の体系を作ることは困難です．

問．行列を世界で一番最初に発見したのは関孝和です．科学史の授業でそう言われました．また，円周率自乗の公式を発見したのは建部兼弘です．

答．たぶん,「行列式」の発見のことを言っていると思います.「行列とは何か」ということですが，問題は，その行列をもとに幾何の理論を展開できたかどうか，その理論が他の分野にどのように影響を及ぼしたか，ということにあり，その点で，関孝和は恵まれた環境にはなかったと言えますね．仮に，行列を発見したのは関孝和である，という史実があったとしても，日本人以外は，ああそうですか，ということになると思います．現代数学にケーリーが及ぼした影響の偉大さと比較すると，残念ですね．関孝和にしろ，建部兼弘にしろ，優秀な和算家がいたことはわれわれの誇りです．でも，産業革命が日本で起きなかったのはなぜでしょう．なぜ，明治時代に，和算ではなく西洋数学 (洋算) を受け入れ，それをもとに富国強兵を進めたのか，関孝和や建部兼弘が評価され出したのは，ごく最近になってからですが，それはなぜなのか，考えなくてはいけませんね．

問．講義内容が理解しきれていないと，質問すらでてこない時があり，困ります．理解できた人こそ質問がでてくるのだと思います．

答．そういうことです．そういうわけで，質問書を成績評価の資料として採用している次第です．

問．何を質問すればよいのでしょうか？

答．講義を聞いていて，最初にわからないことが出てきたことを質問してはいかがでしょう．えっ？全部わかった？私 (石川) の授業は，そんなにわかりやすいですか？それなら嬉しい限りですが，もしそうだとしても，何か連想したことを質問してください．ところで,「p が素数ならば，$\sqrt{p}$ は無理数」の証明や，トレミーの定理の証明が寄せられています．では，$\sqrt{n}$ が無理数であるような自然数 n はどんな数が，特徴づけてください．また，トレミーの定理の逆を証明してください．ところで，講義中に「ケーリー・ハミルトンの定理」が出てきましたが，最近の高校数学では,「ハミルトン・ケーリー」に修正されている様です，という情報をもらいました．私 (石川) はケーリー先生を尊敬しているので，その問題は見過ごせませんね．なんとかケーリーをつけたい．ところで，花粉症を放っておくというのはかなりつらいことなので，自分の体を傷つけるのと同等なのでは？それに何度も鼻をかむと鼻の下も痛くなるし... という指摘を受けました．何か反論したいのですが，もう思いつきません．最近，杉の木に何かの水溶液をある濃度で注入すると花粉の量が激減することがわかったそうです．近い将来，花粉症で苦しむ人はいなくなるかもしれません，という情報をもらいました．それは人間にとって朗報ですね．でも，杉にしたら迷惑な話でしょうね．ところで，三波豊和が，私が幼少のころ NHK 教育テレビで「はに丸くん」に出演していた記憶があるのですが，友人は冷たく「知らない」と言い放ちました，という情報をもらいました．あの名作「はに丸くん」を知らないなんて... ところで，はに丸くんの相棒の埴輪の馬の名は「じんべい」でしたか？また，三波春夫さんは，かつて笑点の大喜利の司会をしていた，というコメントをもらいました．それは，てんぷくトリオの三波伸介 (みなみしんすけ) さんですね．びっくりしたなーもう (三波伸介の有名なギャグ)．すこし講義内容から脱線しているので，反省しています．ではまた．