平面幾何の旅・質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 5 (２００１年5月１５日) の分

問．射影幾何は，円や長さがなくて，どうして成り立つのですか？射影幾何は定規だけを使い，長ささえ関係しないとのことですが，円や長さに関係なく直線だけをいくら引いても平面が分割されるだけで学問にするようなことはないように思えてしまいます．まして，平行線が交わることにするなんておかしいです，無理矢理作った学問のように思えます．

答．こんにちは．来週 (５月２９日) は出張のため休講にします．ところで，この前の日曜日の「知ってるつもり」を見ましたか？三波春夫先生の特集でしたね．さて，回答ですが，よい質問ですね．これから講義でお話していくのですが，結論だけを言うと，直線だけを使うことによって，２次曲線 (円錐曲線) が考えられます．不思議ですね．それから，平行線が交わるというのは，確かに誤解をまねく表現ですが，通常の平面に,「無限遠点たち」を付け加えて考えるという意味です．はじめは無理矢理に見えるかもしれませんが，そのうち,「自然にできた幾何の楽園」であると感じてもらえるよう努力します．

問．射影幾何はユークリッド幾何とは別の数学ですか？射影幾何では，平行な２直線にも交点があるとみなしていて，ユークリッド幾何の「平行な２直線は交点がない」ということに矛盾しています．

答．その通りです．別の数学です．ユークリッド幾何のいくつかの定理が，射影幾何を通して証明できますが，それでも，あくまで別の数学と考えるのがよいと思います．

問．「定規だけを使った幾何」「平行な２直線にも交点があると仮定」という言葉にとまどいを感じます．射影平面はプリントを見た瞬間，頭が混乱しました．

答．たとえると，現在の小泉首相のように，ハギレの良いわかりやすい言葉を使って説明している段階で，具体的にはまだ何も言っていないので，始まるまえから，わからないというのは早い．皆さんは話せばわかる，話せばわかると信じています．

問．今までの講義もうっすらとしか理解できていないで，とりあえず板書だけした感じがあったのですが，射影幾何になったらアウトですか？

答．ユークリッド幾何と射影幾何は別の数学なので，まだ望みはありますね．ところで,「うっすらとしか理解できれいない」というのは,「全然理解していない」ということですね.「理解した」というのは,「道理でわかった」，つまり，たちこめた霧が晴れるように「はっきりわかった」ときに使う言葉なので... 失礼なことを書きましたが，奮起を期待しています．

問．「射影幾何」というものは,「ユークリッド幾何学を拡張したもの」という認識でよいのでしょうか？例外的な場合のみ役に立つということなのでしょうか？

答．その認識で間違いではないと思いますが,「拡張する」には，ユークリッド幾何にはなかった新しい考え方が必要であった，ということにも注目しましょう．その新しい考え方が，その後の数学という学問の流れ，ひいては人類の文明・文化の発展に多大な影響を及ぼしています．たとえると，皆さんが「がけっぷち」にいるとして，そこから先に進みたい，でもそれは無理だと，後ずさりするのも仕方ないのですが,「翼を作って空に飛び立つ」という考え方もあるわけです.「平行線は交わらない」というのは,「人間は空を飛べない」というようなもので，それはそれでもちろん正しいのですが，じゃあ,「飛べるようにすればよい」という発想の転換も大切なわけです．

問．幾何学は，数百年も前に完成されていると思います．今の幾何学は進展できないと思います．

答．その幾何学自体が時代とともに変化していくわけです．学問に完成はありません．学問に終わりはありません．飽くことのない研究があるのみです．

問．射影幾何を使って，どうして「長さの比の符号」や「一直線上の３点の順序」をさけることができるのですか？３次元で，原点があるのなら，やはり座標があって,「長さの比の符号」や「一直線上の３点も順番」が存在するのではないのですか？

答．あるけれど，使わなくても済む，ということです.「こだわらない」ということです．

問．射影幾何が「直線」の概念だけのものなら，円を使ったパスカルの定理などは証明できなくなりませんか？

答．なりません．不思議なことに，直線の話だけから，２次曲線 (円錐曲線) が構成でき，パスカルの定理も，難なく証明できます．この講義で，それを紹介します．

問．デザルグの定理やパスカルの定理の説明について，なぜ，長さや角度を用いてはいけないのでしょうか？

答．いけなくはありません．正しい証明です．証明がカバーできない場合があるので，そこには通用しませんが，正しい証明です．言いたいのはそういうことではなくて，長さや角度には「こだわらない」，そうすることによって，新しい視点からものを考えられ，その結果，定理が「なぜ成り立つか」ということが理解できるようになる，ということです．

問．各幾何の分野において必ず，真は真なのですか？

答．真は真です．

問．「円錐曲線」とは何ですか？

答．円錐を平面で切り取ってできる曲線です．空間内に円錐をイメージしてください．上下両方に延びた円錐です．原点が「頂点」であるとします．(式で書くと，$x^2 + y^2 - z^2 = 0$ で表されます)．それを平面で切り取ります．水平な平面で切り取れば，円 (または点) ができますが，すこし，傾いた平面で切り取ると，楕円 (だえん) ができます．さらに平面を傾けていくと，放物線になり，さらに傾けていくと，円錐を上下の２箇所で切り取り，双曲線になります．このことから，いわゆる「２次曲線」，つまり楕円や放物線や双曲線を円錐曲線とも呼ぶのです．

問．パスカルの定理の逆はないのですか？

答．もちろんあります．６点が同一円周上にあるための条件を与える定理ですね．でも，この講義では扱いません．

問．パスカルの定理で出てくる同一円周上の６点は，順番は関係あるのですか？

答．定理の文章に書いてある通りで，円周上での位置関係は任意です．

問．パスカルの定理で，同一放物線上や，同一楕円 (だえん) 上にあるときは，どのように証明するのですか？

答．講義で説明します．

問．幾何における定理は極端な条件でも成立しますか？たとえば，パスカルの定理でも，６点の間隔 $\to 0$ のときに,「定理の破れ」が起こることはないのですか？(パスカルの定理は円の接線になるだけなのかもしれませんが)．

答． 成立するときも，成立しないときもあります．極端な条件を考えることは，数学一般で大事な発想です．もちろん幾何学でも重要です．

問． パスカルとはどんな人ですか？物理で Pa(パスカル) という単位を使います．($[\mathrm{Pa}] = [N/m^2]$)．パスカルも物理学において多大なる貢献をしていたはずなので，数学者であり物理学者でもあったということになるのでしょうか？

答． そうですね．ただし，その当時，物理学というのはなかったと思います．物理学は新しい学問です．それに昔は物理は,「自然哲学」と呼ばれていました．だから「自然哲学者」であったといえます．それから,「数学者」という呼び名もあったかどうか怪しくて，たぶん「幾何学者」というべきでしょうね．パスカルは，幾何学者であり哲学者であった，ということですか．ところで，関係ないですが，パスカルの有名な著書「パンセ」の冒頭に,「幾何学的精神」と「繊細の精神」という区別が出てきますね．

問． 補助線によって与えられた点や線を使って証明を行った場合，それは図を使わずに論理だけで証明したことになりますか？先週の質問の回答で「証明は論理だけでなされていて，図はそれをわかりやすくするために書いているだけです」というのがありました．証明には論理しか使わないようですが，図を参考にして定めた各点の関係などが，一般的に成り立つのはどうしてですか？

答． 誤解されるとこまるのですが，証明を発見するのに，図は不可欠です．図を使わないで，定理を理解したり証明を見つけるのは不可能ですね．ここで言いたいのは,「図を使って発見した証明は，最終的には論理だけを使って書かなければいけない」，ということです．そうすることによって，図にかかわらない，一般的に成り立つ定理が証明できるわけです．

問． 線形代数とは何ですか？「行列」と「線形代数」という名称の関連もわかりません．行列を幾何にもちこむのですか？

答． もちこむのではなく，行列は幾何にもともとあるものです．線形代数は,「ベクトルと行列」を扱う代数学ですが，行列が線形写像を表現することから,「線形」代数と呼んでいるわけです．ベクトルや線形写像は，基本的な幾何の対象です．

問． 線形代数ができるまでに，幾何というのは色濃く反映したのでしょうか？

答． 反映しました．今，皆さんが習っている「線形代数」は，昔は「代数学と幾何学」と呼ばれていた科目です．皆さんの御両親や親戚の年輩の人で，大学で理系出身の人がいたら，聞いてみてください．たぶん,「代数学と幾何学」という科目を習っていると思います．それが今の線形代数です．ところで，デカルトが，代数を使って，幾何学を研究することを始めたわけですが，その流れが現代に至っていると言えます．射影幾何も，ここに深く関わってきます．つまり，線形代数は，幾何学が母，代数学が父であると言えます．

問． 今，実際に授業で線形代数をやって，行列の勉強をしているのですが，実際，線形代数は行列そのもののことなのでしょうか？行列といっても，実際は計算しかしていません．行列を応用して何か解くものが，この幾何学の他に何かあれば教えてください．(線形代数 = 行列だったら)．

答． 線形代数 = 行列，ではないですが，教えましょう．たとえば，統計の分野や，線形計画法では行列は不可欠です．

問． デザルグの定理が，まるで図法のように思えるのですが，やはり関連があるのでしょうか？

答． あります．

問． 射影変換というのは，広義での「関数」ということですね．

答． そうです．いわゆる「写像」です．

問． 写像 f, g, h とすると，$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ は成り立つのですか？ある本には，成り立つと書いてあったのですが，たとえば，複素平面上の写像 $f : z \to w = z + 1, g : z \to w = z + i, h : z \to w = 2z$ とすると，$h \circ (g \circ f) = 2z + 2 + 2i, (h \circ g) \circ f = 2z + 1 + 2i$ になると思います．

答． 結合法則は成り立ちます．上の計算では，正しくは，$h \circ (g \circ f)(z) = 2((z+1)+i) = 2z+2+2i, (h \circ g) \circ f(z) = 2((z+1)+i) = 2z+2+2i$ で等しいですね．ところで，写像というのは数学の基本です．この講義でも「配景写像」という写像を扱います．実はこの「配景写像」が抽象的な写像の雛形です．

問． リーマン球面 (複素球面) で，無限遠点を１つ定めていますが，$+\infty$ と $-\infty$ はどうして１つだけに定まるのですか？

答． もともと，$+\infty$ や $-\infty$ は数ではありません．数列や関数の極限の状況を表す記号にすぎません．実軸上をプラスの方向に発散する状況を形容するのが $+\infty$，マイナスの方向に発散する状況を形容するのが $-\infty$ ですね．形容詞です．無限遠点は，そのようなものを実体化させたものであり，その過程で，発散する方向は，その無限遠点とは関係のないことなので，区別しない (できない) ということです．ちなみに，リーマン球面は「複素射影直線」とも呼ばれます．

問． 「方べきの定理は符号をこめて成立する」とは，どういうことですか？どのように符号をつければよいのか，よくわかりません．方べきの定理の説明で,「いずれの場合も符号をこめて成立」という言葉の意味がわかりません．

答． $AP \cdot AQ$ という式は，長さの積なので，通常は，正の数と考えられますが，さらに，３点 A, P, Q の直線上の順序によって符号を付けます．３点が P, A, Q (または，Q, A, P) の順で並んでいるときはマイナス，A, P, Q (または P, Q, A, A, Q, P, Q, P, A) のときはプラスの符号を付加的な情報として考慮します．いずれの場合とは，点 A が円の内部にある場合も，円の外部にある場合でも，それぞれの場合で，点 A を通る直線によらずに，符号の情報も一致する，ということです．

問． 方べきの定理の２つ目の図形において，なぜ成り立つのかわかりません．

答． 円に内接する４角形の向かい合う角の和が $180\ ^\circ$ということを使えば簡単です．このこと自体は，円周角一定の定理の証明 (下の回答を参照) を考えればすぐわかります．考えてみてください．(ここでは紹介できませんが，解答もいくつか寄せられました)．

問． 円周角一定の定理の証明がわかりません．もう一度お願いします．

答． ３点 A, B, P をそれぞれ円の中心 O と結べば，$\angle AOB = \angle APO + \angle PAO + \angle BPO + \angle PBO = 2\angle APB$ となるので，すぐにわかります．

問． 方べきの定理で，２直線が円に接する場合でも成り立つのですか？

答． 成り立ちますね．

問． 方べきの定理を球に拡張しようと試みました．

答． 定理を作り証明を書いてくれました．２直線を含む平面で球を切断する円を考えるわけですね．正しいです．

問． 「方べきの定理」の名の由来を教えてください．

答． 知りません．誰か知りませんか？

問． 方べきの定理は，楕円にも使えますか？

答． 使えないと思います．

問． メネラウスの定理で，$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=-1$ のような順であてはめなければならないのですか？$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1$ のようにあてはめてはいけないのでしょうか？

答． いけなくありません．普通の数の掛け算なので，掛ける順番は気にしなくてもよいです．同じです．

問． チェバの定理をメネラウスを用いずに証明してみました．

答． 符号を気にしなければ，正しい証明ですね．では，チェバの定理の逆も証明してみてください．

問． 高校の時に,「$\sqrt{3}$ は無理数である」ということを背理法で証明した記憶があるのですが,「$\sqrt{3}$ は無理数である」という文章には仮定がなく，結論で終わっています．いったいこの仮定は何なのでしょうか？「〜ならば $\sqrt{3}$ は無理数である」という形でないと背理法は使えないと思うのですが．

答． 仮定がなくても背理法は使えます.「$\sqrt{3}$ は無理数である」に確かに仮定はないですね．もちろん，$\sqrt{3}$ の定義や，無理数の定義は前提にしていますが，ここでの仮定はない．だから，何も仮定しないで，$\sqrt{3}$ は無理数である，ということを否定して，矛盾を導けばよいわけです．ところで,「$\sqrt{3}$ は無理数である」という命題は，正しいので定理ですが，定理としての価値はあまりありません．というのは，この命題は，$\sqrt{3}$ という１つの数にだけ使えるだけで，あまり一般性がないからです．たとえば,「p が素数ならば，$\sqrt{p}$ は無理数である」という命題ならば，やや一般性をもつので，定理としての重要性を増します．では,「p が素数ならば，$\sqrt{p}$ は無理数である」ということを背理法を使って証明してみてください．

問． トレミーとは，紀元前 150 年ごろの，エジプト生まれのギリシャの天文学者です．トレミーの定理は,「円に内接する四角形」についての定理であり，(対辺どうしを掛け合わせた２つの和) = (対角線どうしを掛け合わせた値) ということです．四角形 $ABCD$ が円に内接するとき，$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$ ということです．

答． というレポートをもらいました．レポートにある証明も正しいですね．ところで，レポートの最後のところに,「逆もまた然り」とありますが，それはどういう意味でしょうか？トレミーの定理の逆は,「４点 A,B,C,D が，等式 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$ を満たせば，四角形 $ABCD$ は円に内接する」ということですが，これは，レポートでは証明されていないですね．(すぐ証明できるとは思いますが)．

問． 何語かは私忘れましたが，トレミーとプトレマイオスは言葉の違いだと思います．地理の資料集に，プトレマイオス朝の地図として,「トレミーの地図」とのっていました．

答． そうですか．情報ありがとう．

問． 「共面」というのはありますか？

答． もちろんあります．空間の４点が，同一平面上にあることです．

問． $\sin t,\cos t$ の考え方は，いつごろ生まれたのですか？

答． 三角法ですね．幾何学の起原です．詳しく知りませんが，紀元前でしょう．

問． ぼくの勝手な判断ですが，直交座標系で，ピタゴラスの定理が成り立たない空間を非ユークリッド空間というと思うのですが，そんな空間が存在するのでしょうか？

答． そのような空間を非ユークリッド空間と呼ぶわけではありません．別の意味です．(今までの回答書を参照)．

問． 楕円は円を一定方向に引き伸ばしたもので，面積も倍率だけ大きくなると，高校で習いました．

答． 面積とは何か，ということを明確にしなければ解けないわけですが，円を小さな長方形で分割して，それを一定方向に引き伸ばすと，その長方形たちが面積がその倍率だけ大きくなるので，楕円の面積も，もとの円の面積と比べて，倍率だけ大きくなる，という説明ではどうでしょうか．

問． オイラーの公式 ($e^{\pi i}=-1$) の作り方がわかりません．数学史上最も美しい式と聞いて (マンガで見て)，逆算して解体してみようと思ったのですが，全然できませんでした．また，これもマンガで読んだのですが，波動関数のような実在するものの計算にも虚数が出てくるというのは本当でしょうか？

答． オイラーの公式については，複素数について書いてある本には，どこにも書いてあります．それを参考にしてください．それから,「波動関数が実在する」というのは言い過ぎだと思いますが，量子力学に出てくるシュレディンガー方程式には，確かに虚数 (複素数) を使います．

問． 昔から気になっていたのですが，球の表面積はなぜ $4\pi r^2$ になるのですか？積分を使うのでしょうか？体積 $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ を r について微分したら $4\pi r^2$ になりますが，これも何か関係があるのでしょうか？

答． 積分を使います．積分と微分は逆の操作なので，当然関係があります．

問． 球の表面積について，高校のとき考えたのですが，次のような方法は間違っているのでしょうか？球面の赤道から角度 θ のところの微小な帯を切り取る．その面積は，$2\pi r\cos\theta$ である．よって，表面積 $S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi r\cos\theta r d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi r^2\cos\theta d\theta=4\pi r^2$．

答． 良いと思います．

問． 「超越数」とは何ですか？そういえば，東大の金田教授らが π の小数点以下を 687 億 1947 万桁まで求めたらしいのですが，そこまで求める必要はあるのでしょうか？

答． 超越数とは,「代数的数ではない数」という意味です．代数的数とは，整数係数の代数方程式の解になるような数のことです．たとえば，$\sqrt{2}$ は代数的数です．というのは，方程式 $x^2-2=0$ の解だからです．π や e は代数的数ではない，つまり，超越数であることが証明されています．ところで，π の 10 進法表示の計算ですが，本人の名誉のためにやっているのでしょう．計算しても別に害はないので，よいと思います．計算機の性能のデモンストレーションとしての意義があるようです．

問． 円と多角形というものの違いは何ですか？円 $=\lim_{n\to\infty}$(正 n 角形) と定義してもよいような気がします．

答． たとえば「丸い」と「角ばっている」の違いがありますね．それはともかく，定義の意味をもっと明確にする必要がありますね．ところで，脳の視覚についての最近の研究の結果，特定の傾きをもつ線分だけに反応する細胞や，円だけに反応する細胞などが見つかっているそうですね．そうすると，円を多角形から考えるのは，自然な傾向なのかもしれません．

問． 確かに,「ホログラフ」を使ったアニメーションは３次元空間における４次元の表現方法だと思います．ここでは，

４次元における球を考えてみます．(x, y, z 方向以外に，時間 t の軸をとり，$x^2+y^2+z^2+t^2=r^2$ を満たすもののことです).「突然，何もないところから点が現れ，３次元の球となり，どんどん大きく膨らみ始めた．その膨らみ方は一定で，いつまでも膨らみ続けるかに見えたが，今度はまた突然一定の割合で小さくなっていった．そのうち球は点となり，次の瞬間そこには何もなくなった」．どうでしょうか？

答． その通りだと思います．ただし,「一定の割合」という部分は不正確な表現です．点が膨らみ始めるときと，膨らみ終わるときでは，膨らみ方が違うのが自然たと思います．

問． ４次元は３次元空間の軸に時間軸が加わったものだと何かで読んだのですが，現代の学問では何次元まででもあると仮定しているのでしょうか？その場合は，増える軸は何の軸だというのはあるのでしょうか？そもそも４次元など高次元の空間は存在するのでしょうか？

答． 何次元まででもあると仮定しています．それが何の軸か，ということは考えません．高次元の空間は存在するか，皆さんが存在せよと念じれば，そこに存在します．

問． 五方星の頂角の和が 180 °になるというのは，中学のときに授業で扱われました．

答． よく覚えていますね．

問． 「対線比 (たいせんひ) の定理」というものは存在しますか？チェバの定理とメネラウスの定理を応用して作られたものらしいのですが，どんな定理なのか，詳しく教えてください．

答． 知りません．誰か教えてください．

問． $\frac{1}{3}\times 3=1$ ですが，これは，$0.3333\cdots\times 3=0.9999\cdots\neq 1$ で，一見おかしなように感じるのですが．

答． $0.9999\cdots=1$ なので，全然おかしくありません．$0.9999\cdots$ という無限小数は，$0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, \ldots$ という無限数列の極限を表しているので，1 に等しいわけです．

問． ５次方程式はなぜ解けないのですか？

答． ガロア群が可解とは限らないからです．私 (石川) は，学生のとき，アルティンの「ガロア理論入門」東京図書，という本で，ガロア理論を勉強して，５次方程式が解けないことがわかりました．

問． 「$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ がなぜ間違いか」について．コップ２つのうち１つ + コップ２つのうち１つ = コップ５つのうち３つ．先生：A 君はこう考えたんだね．生徒 A：はい，そうです．先生：この問題はさておいて，ケーキでも食べようか．$\frac{1}{2}$ のケーキと $\frac{1}{5}$ のケーキ，A 君はどっちがいい？A 君：$\frac{1}{2}$ は２つに分けたうち１つ，$\frac{1}{5}$ は５つに分けたうち１つだから $\frac{1}{2}$ のケーキ！先生：じゃあ A 君には，$\frac{1}{2}$ のケーキをあげる．と言って，すごく小さなケーキの $\frac{1}{2}$ を差し出す．そして，先生は $\frac{1}{5}$ のケーキを食べるね．と言って，すごく大きなケーキの $\frac{1}{5}$ を食べる．A 君：あれ？$\frac{1}{2}$ の方が小さい．どうして？先生：$\frac{1}{5}$ の方は，もともと大きいケーキを $\frac{1}{5}$ にしたものだね．$\frac{1}{2}$ の方はすごく小さなケーキを $\frac{1}{2}$ にしたものだね．このように分数を考える時は,「もとになるもの」は何かを考えないといけないんだ．さっきの問題にもどるよ．コップ２つのうち１つ分を $\frac{1}{2}$ としたとき,「もとになるもの」は何？A 君：コップ２つ．先生：そうだね．じゃあ，コップ３つのいち１つ分の時,「もとになるもの」は？A 君：コップ３つ．先生：そうだね．ほら，今言ってもらったように,「もとになるもの」が違うよね．だから，分母の２と３を足して５にしたりできないんだ．A 君：わかりました．

答． 私 (石川)：よくわかりました．

問． 算数と数学の違いは何ですか？

答． 「数を算える (かぞえる)」と,「数を学ぶ」の違いです．

問． 平面幾何は，製薬会社で，どんな風に役立つと思いますか？化学系のことに関連することがありますか？

答． 立体幾何は，分子構造の解明に役立つと思います．

問． 「空間幾何」というものはありますか？

答． あります．立体幾何とよばれています．

問． 数学で使われる公式，定理はすべて論理的に証明されてから使われるものなのですか？円錐，円の体積は，積分により公式が求められるのは分かりますが，積分は 15, 16C に生み出されたものなのに，それまで，円錐，円の体積が求めなかったと考えるのはおかしいと思いました．

答． そうですね．昔は，数学という学問が整備されていなかったので，証明されていなくとも，経験則として使用されていたと考えられます．現在の新しい学問のありかたと同じです．

問． なぜ昔の学者は他分野で活躍できたのですか？

答． 昔の人が研究した結果，その分野が発展し，いろいろな分野に分れたからそう見えるのだと思います．昔は，学問は何でも哲学 (あるいは幾何学) でした．現代でも，皆さんが，よい仕事をすれば，いろいろな分野に影響を与え，結果として，他の分野でも活躍できるかもしれませんね．

問． 西洋でのみ幾何学は発達したのですか？日本でも，鶴亀算をつくったり，江戸時代輸入されてきた３平方の定理を誰かが証明したりと，数学的思考が劣っていたわけではない様ですが．

答． 数学的思考が劣っているとは思いません．ただ，実用的思考が勝っていて，長期的視野に欠ける，ということが，東洋の文化の根底にあると思います．これは致し方ない，それを認めた上で，これからの時代に，西洋文明の生きづまりを克服するにはどうしたらよいか，ということを考えればよいと思います．劣等感も優越感も必要ありません.「冷静な誇り」と,「遠くを見つめる視線」があれば，日本人も活躍していけると思います．

問． 古典幾何学の世界をより広く知るためのきっかけを教えてください．現代において古典幾何学の範囲内で幾何学をより追求している人はいるのでしょうか？

問． いると思いますが，詳しく知りません．ところで，こう言って予断をもつようなことを言ってはいけないのかもしれませんが，現在，古典幾何学を研究している人のレベルは低いと予想されます．というのは,「古典幾何学の範囲で」と枠をきめてしまった時点で，視点・方法に制限を設けてしまっているので，学問が姑息になってしまうからです．昔は，その古典幾何学が，制限ぬきの限界をきわめた学問だったからよいわけですが，現代において，いろいろな幾何学が生まれているのにかかわらずそれを無視するというのは，井の中の蛙 (かわず) であり，学問としての正当性が疑われるか

らです．でも，それはそれとして，古典幾何学を広く勉強するのは良いことです．たとえば,「幾何学大辞典」という本 (事典) が図書館や生協の書籍部にあります．分厚い本なので，あくまで参考にするとよいかなと思います．

問． 定理は証明できないと使ってはいけないのですか？習った範囲だから，証明しなくても使ってよいというのはおかしくありませんか？

答． 数学のユーザーをめざすか，数学の専門家をめざすか，によって答が変わってきます．ユーザーとしては，証明するのは専門家にまかせて，それを信用して定理を用いればよいと思います．もちろん，応用の際，必要が生じた段階で，定理の証明にまでさかのぼればよいわけです．一方，専門家を目指す人は，その定理の意味あいを証明が明確に表していることが多いので，証明を避けて通るわけにはいきません．定理を使った場合，問われれば，その証明を，概略だけでも再現できるのが理想です．

問． 余談ですが,「定理の証明の観察」という言葉について，僕は定理は事実そのものもそうですが，その「導き方」にこそ応用性があると思います．また，その事実が「示せること」に感動なりをおぼえるので，この授業の進め方は非常に気に入っています．

答． ありがとう．

問． 普段ボーッとしているときに，数学の定理や何かをひらめく事が多いのですか？

答． ボーッとしているときも，忙しくしているときもひらめきます．ほとんどの場合，つまらないアイディアですが，ひらめきます．(電球マーク)．

問． 新たな定理を発見するのに必要なものはズバリ何だと思われますか？

答． スバリ，愛です．

問． 質問書の回答を読んで，周囲のレベルの高さ，知識の多さに圧倒されています．

答． それは刺激になって良いですね．この講義は，皆さんの自信を喪失させるためにあるのではなく，皆さんに幾何のおもしろさを伝えるためにあるので，積極的にこの機会を利用して，そしてマイペースで「考える力」を養成してください．知識は，必要を感じたらいつでも知ることができます．

問． この授業は「平面幾何の旅」ですが，歴史的なことはやらないのですか？あまり旅をしている気分になりません．もっと，その証明が見つかった時の歴史的背景や幾何の歴史などの講義をしてほしいです．証明ばかりではつらいです．

答． つらいですか．こまりましたね．朝日カルチャーセンターではないので，どこでも聞けるような話をしても仕方がないので，少し,「数学の中身に踏み込んだ話」をしているわけです．なるべく御期待に答えるように努力しますが，旅は非日常を体験することなので，たまには証明を気楽に鑑賞してみるのも良いかもしれない，と苦しい言い訳をしておきます．ところで，皆さんも御存じだと思いますが，この講義の題目は，難解なことで有名な映画「2001 年宇宙の旅」を意識して付けています．

問． ユークリッド幾何は現実的な平面幾何なのですか？ユークリッド幾何では証明できない定理があると言われましたが，それをなくしたものが，射影幾何ならば，ユークリッド幾何はあくまで「仮の」「抽象的な」平面幾何学だと思われます．全ての現象・定理を証明できるのが真の幾何学ではないでしょうか？それともそんな幾何学なないのですか？

答． 全ての現象・定理を証明できる幾何学などはありません．もし，あると言ったら明らかな詐欺になります．

問． 定理を証明するのは，数学的に美しいからですか？

答． その通りです．

問． どうすれば，証明を授業でやっているように，すらすらできるようになるのですか？

答． 「すらすら」できている，などと言われたのは生まれて初めてです．とにかく，事前に準備しているからです．

問． 質問のために予習した方がよいでしょうか？せっかく質問するのだから実のあることを訊きたい，などと思っているのですが．

答． この科目に限らず，予習 (と復習) をすることをお勧めします．

問． 毎回，理解はしていますが，質問を無理に作るのはむごいような気がします．

答． 無理に作らず，自然に作ればよいと思います．授業を身を入れて聴いていれば，自然に質問が湧くと思います．ところで，学問の基本は「自問自答」だと思います．自問自答しながら講義を聴くのが理想です．その際，もちろん，声に出すとうるさいので，黙って頭のなかで自問自答するわけですが，それにすべて答えられたら超天才です．普通は，わからないことが１つぐらいあるはずです．自分に尋ねてわからなかった質問を詳しく書けば，それでよいわけです．

問． 大学の数学というのは，論理として成り立っていれば，切り捨てたりすることは少ないですか？高校の時に，数学がすごく好きで，よく考えて，自分にあった方法を使ってやっていました．そうすると，先生に,「お前の解答を見るとすごく疲れる」やら，塾の講師に自分のやり方のなおし方を求めたら,「そんなやり方は大学に行ってからやれ」といわれました．そんなことはあまりないのですか？

答． ないです．どんな方法でも正しければ，どんどん使ってください．ただし，その際，自分の方法を，人にわかってもらえるように努力してわかりやすく説明しなければいけません．実は，数学とは,「方法をわかりやすく説明する学問」なのかもしれません．

問． 質問書に書くことは講義中に急に思い浮かびます．そうなると，すぐ書きたいのです．最後の少しの時間では大変です．だからといって，講義中に書くと，その間 (あいだ) が抜けてしまいます．

答． そうでしたか．もちろん，質問書を講義中に書いても悪くはないですが，浮かんだ質問をメモしておいて，最後にまとめて書いたほうが，最終的な質問ができるので，よいのではないかなと思います．いかがでしょう．

問． 毎回ちゃんと質問を書けば「不可」はつかないのでしょうか？「可」でもよいので単位をください！

答． 「ちゃんと」した質問を書けば不可はつきません．でも，上のような質問でお茶を濁してばかりいると，不可になるかも知れないので注意してください．ところで，花粉症と寄生虫の件ですが，寄生虫のために用いられた免疫システムの力があまって，無害な花粉などにも反応するようになってしまったそうだ，という情報をもらいました．花粉症の予防には，鼻の奥の粘膜の部分をレーザーで焼いてしまう，というのもあるらしい，痛みがなく，個人差はあるが，何年間かもつらしい，という情報ももらいました．でも，私 (石川) は自分の体を傷つけるのは好きではありません．それから，三波春夫がわかりません，という質問がありました．最近亡くなった，あの偉大な国民的歌手を知らないなんで信じられません.「知ってるつもり」を見ましたか？三波豊和の父親ですね．ではまた．