平面幾何の旅・質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. ４ (２００１年5月８日) の分

問． メネラウスの定理は，３点 P, Q, R が，線分 AB, BC, CA になくても成り立つのですか？(多かった質問です)．

答． こんにちは．最近，三波春夫の歌謡浪曲の CD を聞いています．やっぱり俵星玄蕃 (たわらぼしげんば) は何度聞いてもいいですね．さて，回答ですが，成り立ちます．メネラウスの定理の文章をよく見てみると，３点 P, Q, R が，線分 AB, BC, CA になければならないとは書いていませんね．１つの直線と，**直線** AB, BC, CA との交点なので，**線分上になくて，その延長上にあってもよい**わけです．定理の下に書いてある図は，あくまで参考図です．定理が適用できるすべての場合を描いているわけではないです．すべての場合を描くなんて不可能ですから．図は使って考えますが，図に惑わされてはいけないわけですね．図を見て，定理を勝手に解釈してはいけない，ということです．

問． メネラウスの定理は，今まで直線上にある３点のうち，２点が三角形の内部にあった形で使ってきたと思うのですが，３点とも三角形の外にある場合でも，メネラウスの定理は成り立つのですか？もしそうだとすると，今まで，メネラウスの定理を本当に理解していなかったということですね．

答． そうだと思います．

問． メネラウスの定理の適用のしかたがわかりません．(これも多かった質問です)．

答． そうでしたか．当然のことですが，定理は「なんとなくあてはめる」ものではなく,「正確にあてはめる」ものです．では，どうすれば正確にあてはめられるか説明してみましょう．まず，メネラウスの定理の文章を見てください．それをデザルグの定理の証明の状況で $\triangle OBC$ と直線 EF に適用します．**A を O に，B を B に，C を C に**，直線 ℓ を直線 EF に読み替えます．直線 BC は直線 BC に，直線 CA は直線 CO に，直線 AB は直線 OB に読み替えます．直線 EF と直線 BC の交点は P なので，**D は P に読み替えます**．直線 EF と直線 CO の交点は F なので，**E は F に読み換えます**．直線 EF と直線 OB の交点は E なので，**F は E に置き換えます**．すると，ほら，あてはめるべきメネラウスの定理の結論は，$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CF}{FO} \cdot \frac{OE}{EB} = -1$ になりますね．わかりましたか？

問． 高校の時に，メネラウスの定理は，３角形があって，その上に直線が３角形の上を切るような状態のときに使える，と教わりました．

答． たぶんそれは君の勘違いです．メネラウスの定理に,「直線が３角形の上を切るような状態のとき」というただし書きはありませんね．数学の他の定理と同様，とにかく前提がすべてみたされれば，定理の結論は必ず成り立ちます．

問． メネラウスの定理とチェバの定理のもっと覚えやすい方法を知っています．高校の先生から教えてもらったやり方で，頂点，交点，頂点，交点,… と，声を出して読むと非常に覚えやすいです．(数枚)

答． なるほど．でも，あくまで,「定理の文章が基本である」ということを忘れずに適用しましょう．法律でたとえると，判例主義ではなく，原文主義です．

問． 講義の中で，定理を証明するために図を用いていますね，証明するときに，作図はどれくらい厳密さがあればよいのですか？

答． 意外かも知れませんが，厳密に言うと，**証明に図は使っていません．証明には論理しか使っていません**．図はあくまで説明・納得用の参考図です．ですから，図は正確に書いた方がよいのはもちろんですが，定理のすべての場合の図を書くのは不可能です．それに，１つの図に限っても，君の使っている定規がもしかしたら曲がっているかも知れないので，完全に厳密に書いたかどうか判定できませんよね．

問． チェバの定理の証明では，向きを気にしなくてよいのですか？

答． 向きを気にしています．消去するときは，マイナスのものは，必ずペアで消しています．

問． チェバの定理を証明するのに，メネラウスの定理を証明しなくてはいけないのですか？

答． メネラウスの定理を使わずにチェバの定理を証明することも可能です．考えてみてはいかがでしょうか．

問． 大昔の人がつくった定理を用いないと証明できないなんて悔しいじゃないですか．例えば，平面幾何にとらわれずに，座標平面などで証明してつじつまが合った場合，それは「証明」したことになりますか？

答． どんな方法で証明しても，それが正しければ，もちろん構いません．ところで,「座標平面」を考えたデカルトも大昔の人ですよ．昔の人が作った定理を用いても，私 (石川) は悔しくないです．むしろ，うれしい．昔の人に比べてわれわれが有利だとしたら，それは，昔の人の考えたことを活用できるからです．それだけの差です.「昔の人より現代人の方が賢い」などと考えがちですが，それはまちがいだと思います．

問． チェバの定理やデザルグの定理等は，どのように発見されたのでしょうか？ひらめきだとしたら神業 (かみわざ) のように思えます．発見というものは，いくら論理的な思考を続けてもできないもののように思います．

答． まったくその通りです．(頭の硬いお役人ではないので) 論理的に考えてばかりいては，何も生まれません．「論理は最後のつめに使う」．

問． チェバの定理と，チェバの定理の逆では，ただし書きが同一のものではないのですが，この点はこだわらなくてもよいのでしょうか？

答． こだわってください．でも，ただし書きの表現は違いますが，意味は同じです．

問． デザルグの定理の証明の最初の「メネラウスの逆定理が示された $\Rightarrow$ デザルグの定理が示される」の部分がわかりません．

答．「P ならば Q」 と,「S ならば Q」という命題があって，もし,「S ならば P」が示されたなら,「P ならば Q」 から「S ならば Q」が導かれるということです．簡単な３段論法です．

問． デザルグの定理の「対応する頂点」とはどういうことでしょうか？どこの延長と，どこの直線の交点をとっていけばよいのですか？

答． 書いている順に，という意味です．A と D，B と E，C と F という意味です．文章に書いている，そのままの意味です．

問． デザルグの定理で，３直線が，２つの三角形の中間で交わることはあるのですか？デザルグの定理の逆もできますか？

答． あります．それから，逆というか，双対は重要です．射影幾何のとき，少し説明します．

問． デザルグの定理はどのような意味があるのですか？

答． ユークリッド幾何というより，この次の「射影幾何」で重要な定理で，ほとんど公理と同じような役目を果たす，ということが知られています．

問． パップスの定理は，直線上の３点の並び方に関係なく成立するのですか？

答． 成立します．というのは，証明では，点の並び方は使っていないからです．

問． パップスの定理で，AF と DE が平行になった場合はどうなるのですか？(２枚)

答． 鋭いですね．その場合は，講義で紹介した証明は通用しませんね．でも定理自体は成り立ちます．射影幾何のところで，もう一度，証明しますが，その証明なら大丈夫です．

問． メネラウスの定理で正負を考えなければならないのは，質問書の式が $\dfrac{x}{1-x} = -\dfrac{x'}{1-x'}$ となってしまうからですか？

答． そうです．符号を考えないと，$|\dfrac{x}{1-x}| = |\dfrac{x'}{1-x'}|$ しか言えないので，$x = x'$ が導かれないわけです．

問． 「３点が一直線上にある」という結論にはどういう有用性があるのですか？自分の知識が乏しく，幾何学の経験が浅いため，よくわかりません．

答． 共線という状態のことですね．有用性というか，歴史的に人類が最初に注目した秩序 (あるいは美) であるということでしょうか．

問． 平面幾何の定理で，逆定理が成り立たない定理はあるのですか？

答． あります．回答書で何度も紹介していますが，たとえば，高校で学ぶ形での「メネラウスの定理」(符号ぬき) は，逆は成り立ちません．

問． 証明で，よく対偶を使ったりしますが，なぜ対偶が真なら，命題が真なのでしょうか？例えば,「ごはんをたべなければ死ぬ」の対偶は,「死ななければごはんをたべている」となると思うのですが，これは真ではないはずです．

答． そもそも命題とは，真偽が定まるような主張であり，あいまいな表現で述べられた主張ではありません．「ごはんをたべなければ死ぬ」は，もともと数学で真偽の判定できないことがらですが，一歩譲って，判定できるとしても，もっと前提と結論をはっきりしてあげないと，命題とはみなされません．たとえば,「１年間ごはんを食べない人は，次の年には死んでいる」と修正しましょう．修正しても，質問の意図とそれほど離れないですよね．さて，この命題の対偶は,「次の年に死んでいなければ，その人は１年間ごはんをたべなかった人ではない」となります．こっそり食べていたわけですね．これは真と言ってよいですね．ほら，何の問題もないですね．

問． なぜ「対偶」は，必ず命題と同じ結果になるのですか？反例はないのですか？

答． 反例はありません．対偶は，元の命題と真偽を共にする，一心同体だからです．

問． 知らないうちに勝手に逆定理を定理として使ってしまうことがありますか？

答． そんなことはありません．(政治家ではないので)．

問． 背理法が納得できません．「A でないと仮定して矛盾する．よって A ならば B である」といった背理法は，A でないという仮定があいまいな物ならば成り立たないように思うのですが．

答． 多分誤解があると思うのですが，まず,「A と仮定して，その上で B でないと仮定して矛盾する．よって A ならば B である」が背理法ですね．それから，数学では，あいまいなものは扱いません．(扱えません)．あいまいなものは，あいまいでないものにした後に，論理を適用しなければいけません．

問． 幾何では裏という言葉は使わないのでしょうか？

答． 私 (石川) は「裏」という言葉はあまり好きではないです．裏口入学，裏日本，裏わざ，表裏のある性格，みんな好きではありません．裏街道を歩く渡世は少しだけ憧れますが... これは冗談ですが，とにかく,「逆の対偶」と言えば済むので，私 (石川) は使いません．

問． 公理「$\triangle ABC$ について，$AB < AC + CB$」が，高校の教科書で証明されていたのですが.「三角形において，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より大きい」という定理を使っているようです．

答． そうですか．良いところに気がつきましたね．でも,「三角形において，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より大きい」ということをどうやって証明するか，という問題になり，これを公理とするか，あるいは，また別の定理を使って証明することになりますね．実際,「$\triangle ABC$ について，$AB < AC + CB$」から「三角形において，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より大きい」が証明できますね．つまり，２つの命題は同値な命題で，代用が可能だと思います．このように，公理系の選びかたには自由度がありますが，とにかく，何か出発点を決めて，そこから定理を証明していくということが，どうしても必要になりますね．

問． 円周率 π が，物理学などの他の分野にもよく使われるのはなぜですか？円周率 π という数は,「直径と円周の比率」という以上の意味があるのでしょうか？

答． 不思議ですね．きっと，オイラーの公式 $e^{\pi i} = -1$ が関係しているはずです．

問． 円周率はどのようにして求めているのですか？

答． 興味があれば，小林昭七著「円の数学」裳華房，を読むことをお薦めします．詳しい解説があります．

問． 「公理を修正する」という事は，よくやられているのですか？

答． 公理は慎重に採用されているので，それが修正されることはそう多くはありません．非ユークリッド幾何の発見などは，歴史的に大きなできごとでした．現代数学では，公理については通常は意識されずに研究が行われています．

問． トレーミーの定理とは，円に内接する四角形の対角線の長さの積は，対辺の長さの積の和に等しい，という定理のことだと思います．証明は，確か，補助線と相似を使った気がします．

答．ありがとう．では皆さん，証明を考えてみてください．

問．ところで，トレミーとはプトレマイオスのことらしいですが，トレミーと呼ぶのは数学だけのように思います．なぜでしょうか？

答．その事実自体を知らないので，理由もわかりません．誰か教えてください．

問．「接弦定理」とは (前回，僕が書いたわけではないですが) 「円の内接三角形とその１頂点を共有する接線でできる角と，三角形の１角は等しい」のことではないでしょうか？僕も証明法を知りたいです．

答．教えてくれてありがとう．証明については，下の問答を参考にしてください．

問．ずっと証明を自力で考えてみたことのなかった，円に内接する三角形とその円の接線の定理 (接弦定理?) の (円周角の定理を使った) 証明を考えてみました．

答．再現できませんが，直径を一辺とする三角形を補助的にとって証明する方法を書いてくれました．正しい証明ですね．

問．パップス・ギュルタンの定理とは,「面積 S の図形を回転軸の周りに回転したときの，回転体の体積を V，重心と回転軸の間の距離を a としたとき，$V = 2\pi aS$ となる」というものです．この体積は，円の方程式をはっきりさせ，積分を用いて普通に求めるもとができます．高校でやったのは，円の上半分と下半分に分けて大変な計算をするものと，バームクーヘン型の積分をするものです．ところで，$V = \int_0^{2pia} S dx = [Sx]_0^{2\pi a} = 2\pi aS$ という考え方は正しいのでしょうか？

答．正しいと思います．もちろん，それを正当化するには少し議論が必要ですね．積分論の良い問題だと思うので考えてみてがいかがでしょうか？

問．星形 (ほしがた) の図形の一番外側の角の大きさの和は，(角の数× 180 °) − (a × 360 °)，ただし，a は，この図形を一筆書きしたときの回転数，で表されるそうです．これは，ピーター・フランクルさんの本に書いていたものですが，その証明法は？

答．ピーター・フランクルさんの本は見たことはないですが，おもしろいですね．この講義の終盤は，これをとりあげましょうか．それはともかく，(対称性の高い) 標準的な図形に (角の数× 180 °) − (a × 360 °) を変えないように変形できる，ということを示せば，あとは，標準的な図形で，チェックすればよいので，一般的な定理が証明されたことになります．

問．五方星 (ごほうせい) の五つの頂角の和が 180 °になるというのは，どう証明することができるのですか？ゆがんだ星の形の場合に証明することができなくなってしまいます．

答．形をゆがませても頂角の和が変化しないことを，補助的に三角形を使って示せばよいと思います．(図を書けば，すぐわかってもらえますが...) ところで，平面曲線 (折れ線) の話は，予定では，この講義の終盤に話す予定です．それを聞けば，体系的な理解ができると思います．もちろん，この講義が予定通り進めば，の話ですが．そして，私 (石川) の講義は，予定通り進んだことがないのですが...

問．３次元の物体は２次元の平面にわかりやすく書けるので，４次元の物体も３次元空間内にうまく表現できるのではないですか？

答．３次元空間内に表現するのは,「ホログラフ」などを使うのかな．月並みですが，４次元の物体を，３次元の物体の時間的推移ととらえれば，アニメーションは，そのようなものではないでしょうか？

問．「大円」とは何ですか？

答．大きな円です．正確には，球面と，その中心を通る平面の交わりとして得られるような円のことです．球面に沿った最短経路です．

問．「無限遠点の集合」というものがナンセンスではないでしょうか？

答．ナンセンスと思われるものに意味 (センス) を与えるのが，数学の役目です．それは,「世界を広げる」ということで達成されます．

問．高次元の幾何というものがあれば教えてください．

答．もちろんあります．説明すると長くなりますが，たとえば，皆さんがいま習っている線形代数は $\mathbf{R}^n$ や $\mathbf{R}^n$ の１次変換の話ですが，それを幾何的に (つまり深く) 理解すれば，それはもう高次元の幾何と呼ぶべきものです．

問．割り算は，なぜ逆数をかけるのですか？それから，$\dfrac{3}{2} = \dfrac{6}{4}$ ですが，(１あまり１) = (１あまり２) になることはあるのでしょうか？小学生に質問されたとき説明できる自信がありません．今日の授業とは全く関係ないのですが，とても気になります．

答．割り算は，割る数をかけたら元の数になるようなものを求めることなので，逆数をかけることで達成されるわけです．それから，(１あまり１) $= 1 + \dfrac{1}{2}$, (１あまり２) $= 1 + \dfrac{2}{4}$ のことなので，なにも問題ないですね．それでは，質問です．$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{5}$ はどうして間違いなの？と小学生に聞かれたら，皆さんはどう答えますか？

問．直感的に理解しにくくなると，とたんに理解が暗くなるのですが，これは訓練する必要があるのでしょうか？

答．「訓練」というと，軍隊みたいで，体育の先生が好きそうですね．それはともかく，直感を磨くことと，同時に，理詰めで納得する努力も大切ですね．

問．定理を暗記しなくてもよいのですか？

答．しなくてもよいです．できれば，暗記しないで，明記 (銘記) してください．つまり，本当にそうなのかな，と思って，具体例にその定理をあてはめて確かめてみたり，証明を考えてみたり，その定理からどんな結果が導かれるか，応用を想像したりしているうちに，自然に身に付けるようにしてください．たとえると，友達の性格は，人から聞いたうわさを暗記する (うのみにする) ものではなく，直接つきあっているうちに，だんだんとわかってくるものである，それと同じです．

問．定理の証明は覚えるのですか？

答．定理の証明も，定理自体も覚える必要はありません．どんどん忘れてください．たとえ話ですが，皆さんが

小説を読むとき，その文章を覚えようとはしませんね．(そのような特別な趣味がない限り)．覚えないけれど，ちゃんと読めて，理解して，感動できますね．ジーンとなったり，たまには泣いたりしますね．しないかな．分野は違いますが，数学もそれと同じことです．数学の勉強で必要なのは，小説を読むことにたとえると，基本的な日本語が読める，漢字が読める，場面を想像できる，自分の経験と比べられる，本を読む時間を作る，そのような心の余裕を持つ，といった，もっと基本的なことです．記憶力は問題ではないのです．

問． 深く学ぼうとする人にとっては，やはり覚えることも大切なのではないでしょうか？

答．「覚える」ということは,「浅く学ぶ」ことではないでしょうか？意外かもしれませんが，深く学ぶには，くり返しくり返し，忘れることが大切です．勉強していれば，意識しなくても少しは頭に残るものですが，それを忘れることを恐れてはいけません．何度も頭の中を通過しているうちに，大切なことは，忘れられなくなるはずです.「忘れようとしても忘れられなくなる」はずです．それが深く学ぶということです.「覚える」ではなく,「いつでも思い出せる」ということです．皆さんは，好きな人の名前は，覚えようとしなくても思い出せるはずです．それと同じことです．要は，愛情の問題です．ところで関係ないですが，私 (石川) の友人の名言に,「忘れようとしても，思い出せない」というものがありました．

問． 定理の鑑賞のはずが，定理自体はあまり多く語らず，ひたすら証明しているような気がします．

答． そう感じられたら残念です.「定理の証明の鑑賞」ということですか．でも，定理を理解するよい方法の一つが，その証明を理解することなので，定理の証明の鑑賞は，定理の鑑賞につながると思います．という負け惜しみを言っておきましょう．

問． 中点定理のことを「パップスの定理」と学んだのですが，間違っているのでしょうか？

答． 間違いではないと思います．単純に，パップス先生は偉くて，いろいろな定理を発見したということだと思います．

問． 今，僕たちが学んでいる定理の名前は，日本だけのものなのですか？

答． そうかもしれません．と言っても，ほとんどの定理の名前は，各国共通なので，ご安心ください．(でもたとえば，ヨーロッパとロシアでは，定理に付く名前が違ったりします．愛国心の強い人たちですね．) 仮に，外国の友人と話をしていて，もしも定理の名前を言っても通じなかったときは，その定理の内容を説明できるようにしておきましょう．その際，定理の文章を丸暗記していてもダメで，どういう定理か，その内容をかみくだいて (たとえば英語で) 説明できなければいけませんね．Oh! I've got it!

問． どうして大学入試で幾何学は軽視されているのですか？

答．「役に立つ，役に立つ」でやっているうちに，取りかえしのつかないことになってしまったのでしょうね．実は，日本の大学生の考える力を奪って，日本の将来の国力を弱めよう，という外国勢力の陰謀かもしれませんね．これは冗談ですが，まあ，大学の大衆化の必然的な帰結なのでしょうね．こまったことです．

問． 入試の数学と大学数学の違いは何ですか？大学は入試数学で何を受験生に求め，大学数学では何を学生に求めるのですか？大学の授業では，入試でやってきたことを使っていないと感じます．

答． 使っています．使っていないように見えても，実は使っています．まだ，入学して１ヶ月ちょっとしか経っていないので，結論を出すのはまだ早いと思います．ところで，入試数学という意味がわからないのですが,「高校数学」の意味ですよね．そうすると，高校数学と大学数学の違いという質問だと思いますが，それは，抽象性，一般性の度合いの違いと，論証性の有無が挙げられるでしょうね．それから，大学で学生に求めているのは，当然，生半可は知識ではなく，スバリ，考える力 (”脳力”) です．

問． 黒板が見えないのですが何とかなりませんか？

答． 見づらくて申し訳ない．そのために，ガイド (似顔絵つき) を配りました．それに板書の主要部分を書いたので，それで補ってください．完全に，とはいきませんが... えっ？まだもらっていない？すぐ取りにきてください！

問． できれば，もう少しゆっくり講義してほしいです．もうちょっと講義スピードをゆっくりしてください．

答． これ以上ゆっくり講義するのは，とても無理です．逆に加速したいぐらいです... 停めてくれるな学生どの．おちぶれ果てても，未来の幾何学，言わねばならぬ，行かねばならぬのじゃ... (三波先生のセリフのまねで)．失礼しました．

問． 講義に関連した質問とは，その日だけの授業内での内容の質問しかダメなのですか？

答． ダメではありません．講義内容に関連していれば，過去のことでも，自分で勉強したことでも，何でも構いません．そしてなるべく回答します．もちろん私 (石川) の能力の範囲内でね．

問．「評価は 0, C, B, A, ...」と書いてありますが，もしかして，A 以上の評価 (S とか AA とか) があるのですか？

答． 鋭いですね．その通りです．0, C, B, A, AA, AA+, AAA, ... と続きます．皆さんの貴重な質問なので，評価に上限は設けられませんね．ところで，この講義では試験はしませんが，私 (石川) のやる試験にも，満点というものは存在していません．100 点満点で点数を付けるなんて野蛮な発想ですよね．

問． 数学者の方々は普段，何をされているのですか？

答． 普段はボーッとしています．ところで，花粉症などのアレルギーは，お腹に寄生虫を飼うことで直るらしい，という情報をもらいました．注射よりましかもしれませんね．人工物を体に入れるより天然物を入れた方がよい... まあ，これは冗談ですが，情報ありがとう．でも，おかげさまで (この文章を書いている時点では) もう花粉症もだいぶよくなりました．元気を取り戻して，ではまた．