# 平面幾何の旅・質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
# No. 3 (２００１年5月1日) の分

**問.** 「定理の逆」という表現がわからないのですが？

**答.** こんにちは．ゴールデンウィークは近所のユニクロに行きました．さて回答ですが，まず,「命題の逆」というものを押さえておきましょう.「$P$ ならば $Q$ 」という形の命題 (真偽が判定できる主張) があったとします．この命題の逆命題は「$Q$ ならば $P$ 」です．ちなみに，否定命題は「$P$ かつ ($Q$ でない)」，対偶 (たいぐう) は「($Q$ でない) ならば ($P$ でない)」です．定理とは，(公理がすべて真であるという前提のもとで) 真であると証明された命題のことですが，通常，定理は,「$P$ ならば $Q$ 」という形をしています．$P$ が定理の前提 (仮定) で，$Q$ が定理の結論 (帰結) ですね．その前提と結論を逆にした逆命題のことを「定理の逆」と言うわけです．ある定理が証明された後，その定理の逆が成り立つ (真) かどうかを問うことは有意義なことです．ただし，定理の逆は，成り立つ場合もあるし，成り立たない場合もあります．(もとの定理によります).

**問.** なぜ定理の逆も証明するのですか？逆を証明する必要があるのですか？定理の証明を逆にといていくだけなので自明だと思うのですが.

**答.** 違います.「定理の証明を逆にといていく」ことはできません．水は高い方から低い方へしか流れません．それはともかく，逆は必ずしも正しいとは限りません．たとえば,「$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ が合同ならば，$AB = A'B', AC = A'C', \angle ABC = \angle A'B'C'$」という定理を見てみましょう．$P$ は「$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ が合同」で，$Q$ を 「$AB = A'B', AC = A'C', \angle ABC = \angle A'B'C'$」とすると，この定理は「$P$ ならば $Q$ 」という形になります．この定理の逆 「$Q$ ならば $P$ 」は正しくないですね．実際に，$AB = A'B', AC = A'C', \angle ABC = \angle A'B'C'$ であっても，合同ではない三角形の例はすぐに作ることができます.

**問.** メネラウスの定理の逆の証明で，仮定と定理を比較して結論として良いのですか？

**答.** 良いです．一旦証明された定理は，正しいので，それ以降は，どこで使ってもよいわけです.

**問.** メネラウスの定理は，$\dfrac{BD}{DC}\dfrac{CE}{EA}\dfrac{AF}{FB} = 1$ という考え方は間違いなのですか？

**答.** 間違いではないのですが,「場違い」です．$\dfrac{BD}{DC}\dfrac{CE}{EA}\dfrac{AF}{FB} = -1$ ということは，大きさが１で，符号がマイナスということで，ここでは，符号の情報も付け加えて定式化しているわけです．なぜこうしたかと言うと，この符号の情報も付け加えた形のメネラウスの定理を使うと，その形のメネラウスの逆定理の証明ができるからです．符号を付けないで，$\dfrac{BD}{DC}\dfrac{CE}{EA}\dfrac{AF}{FB} = 1$ のままだと，メネラウスの逆定理は成り立ちません！

**問.** メネラウスの定理の証明で，$\dfrac{CE}{EC} = -1$ の部分がわかりませんでした．これがベクトルだったら $-1$ で，なるほどなという感じにはなんとなくなるのですが，これはベクトルの意味で考えて良いのでしょうか？

**答.** そうですね．ベクトルの向きも考慮していると考えると考えやすいですね．ただし，ベクトルの割り算 (ベクトル÷ベクトル) というのは意味がないので，あくまで,「長さの比に，ベクトルの向きの比という情報を付け加えたもの」と思うのが best です．必要があって，符号の情報を残しました．この符号は，たとえると,「残像」とか,「思い出」とか,「しっぽ」などといったものです.

**問.** $\dfrac{BD}{DC}\dfrac{CE}{EA}\dfrac{AF}{FB} = -1$ はベクトルで表す方が明確ではないでしょうか？

**答.** 符号を決めるところは，ベクトルを使うと明確ですね.

**問.** $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BD'}{D'C}$ から $D = D'$ が導かれるところがわかりません.

**答.** 符号の情報 (”しっぽ”) を残しているので導かれます．さて，考えやすくするために，直線 $BC$ 上に $B$ が原点で，$C$ が 1 になるように座標をとります．このとき，$D$ の座標を $x$ とすると，$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{x}{1-x}$ と表されます．$D'$ の座標を $x'$ とすると，$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BD'}{D'C}$ は，$\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{x'}{1-x'}$ ですが，この式を整理すると，$x = x'$ となることがわかります．確かめてください.

**問.** 数学は，どれも確かなものから広げていって，定理などを証明するものだと思いますが，定義できないもの，つまり無定義語をもとにして証明していったものは，すべて机上の空論になってしまうと思うのですが，よろしいのですか？

**答.** よろしいのです．根本的にものごとを考えるとそういうことになります．１つの用語を定義するには，別の用語を使う，その用語を定義するには，また別の用語を使う，とさかのぼっていくと，循環論法におちいらない限り，出発点になる用語，すなわち，無定義語がどうしても必要になることが納得できると思います．すべての学問は，机上の空論です．机上の空論というのは，学問をけなす言葉ではなく，理想です．もちろん，それを現実と比較するという態度を忘れてはいけませんが．たとえると，太陽系 (銀河系でもよい) はそれ自身で安定していることが大切で，どこか他の場所から「吊るされている」必要はないということです.

**問.** 本当に点や線は無定義語なんですか？以前，点は大きさをもたない位置を表すものであり，線とは長さと位置を表すものだと聞きました.

**答.** では,「大きさ」とは何でしょう？「位置」とは？「長さ」は？と定義していくには，別の用語が必要になります.「どうどう巡り」をしない限り，用語についても，何か出発点が必要になりますね．いくつかの無定義語がどうしても必要になるわけです．もちろん，無定義語として，どれを選ぶか，という自由度はありますが.

**問.** 非ユークリッド幾何で，球面の円周の部分が直線だということ自体が，直線としての定義に反しているので

納得いきません．

**答．** ユークリッド幾何では,「直線」に定義はありません．もちろん，それでは，愛想がないので，初等幾何の本では説明がついている場合が多いですが，とにかく，大事なのは，２点を通る直線がただ１つ存在する，などといった公理が成り立つかどうか，ということです．ヒルベルトという大数学者がかつて,「点」の代わりに「机」，直線の代わりに「椅子」という言葉を使っても幾何学は成立する，と言ったのは有名な話です．(もちろんそれでは直感が発揮できなくてつまらないですが).

**問．** 球面上の三角形の内角の和が 180 °より大きくなるとはどういうことですか？球面上の三角形というのは直線ではなく曲線だと思います.

**答．** この場合,「直線」とは「大円」，つまり最短経路を意味します.

**問．** 平行線の公理を他から導こうとして失敗したことから，非ユークリッド幾何が生まれた，とのことですが，非ユークリッド幾何では，その公理を導くことに成功したんですか？

**答．** 違います．平行線の公理に代わる公理から幾何学を作ることに成功したのです.

**問．** 「共線」というのは，３点を通る直線ということでしょうか？

**答．** そうではなくて,「３点が一直線の上にある状態」をいう言葉です.「線を共にする」という意味です．英語で，collinear と言います．形容詞です.

**問．** 三角形の五心は,「同一点で交わる」ということが大事なのでしょうか？

**答．** そのことを意識してもらう意図です.

**問．** 傍心の存在証明で,「$\angle CBE$ の二等分線と $\angle BCF$ の二等分線の交点を $I$ とおく」と書きましたが，$CI$ と $BI$ が平行だったら $I$ は存在しません．$CI$ と $BI$ が平行でないということはどうやって証明すればよいのでしょうか？

**答．** $\angle CBI$ と $\angle BCI$ を足したものが，180 °より小さくなることからわかります.

**問．** 直角三角形の合同定理がよくわかりません.

**答．** 直角三角形の斜辺と一辺の合同定理です．証明は，同じ長さの一辺どうしをつけて，二等辺三角形をつくり,「二等辺三角形の２つの底角は等しい」という定理と「三角形の内角の和は２ $\angle R$」 という定理を使えば証明できます.

**問．** 重心と垂心の存在証明がわかりません．ヒントを教えてください．(補助線のひき方など)．あとは自分で考えたいと思います.

**答．** 重心については，点 $A$ と $BC$ の中点を結ぶ直線と，点 $B$ と $CA$ の中点を結ぶ直線との交点を $G$ とし，$CG$ の中点をとり,「中点連結定理」を使って，いろいろな部分の辺の比を考えます．これがヒントです．垂心については，各頂点を通り，対辺に平行な直線を３本引いてみましょう.

**問．** 三角形の重心が，頂点と対辺の中点をむすぶ線分を２：１に内分するのはなぜですか？証明のしかたを教えてください.

**答．** 上の質問の回答のように補助線を引けばわかります.

**問．** 線分を３等分する方法を教えてください.

**答．** 上の質問と回答を応用するとできますね.

**問．** 「内心と外心が一致すれば正三角形である」という証明をしてみました.

**答．** ここには再現しませんが，証明を書いてくれた．自分で証明しようと努力することは良いことです．これが「数学をする」ということですね．ところで，その証明は,「内心と外心が一致する，ということを仮定して，正三角形である，という結論を導く」ということをしていない，という理由で正しくありません．再考を期待しています.

**問．** 「傍心」は３つありますね．しかも，３つの傍心をつないでできる三角形がもとの三角形と相似で外心が共通になるように見えます.

**答．** なるほど．良いところに気がつきましたね．ぜひ，確かめてみてください.

**問．** 三角形の傍心は，どのような円の中心ですか？

**答．** とくに特別な円の中心ということではないと思います.

**問．** 平面幾何の公理で，$|AC - CB| < AB$ は要らないのですか？

**答．** 要りません．公理は「任意の $A, B, C$ について $AB < AC + CB$ 」という意味ですが，この公理から，質問の不等式は導かれます．なぜなら，$|AC - CB| < AB$ は，$AC - CB < AB$ かつ $-(AC - CB) < AB$ ということ，つまり，$AC < AB + CB$ かつ $CB < AB + AC$ ということですが，これは,「任意の $A, B, C$ について $AB < AC + CB$ 」から従うからです.

**問．** 重心で三角形をつるすと，つり合うのはなぜですか？三角形の重心はなぜ物理的にも重心なのですか？

**答．** わかりません．モーメントの問題ですが，物理の本に書いてあると思うので，ぜひ調べて教えてください.

**問．** エジプトのピラミッドにも幾何が応用されていると聞いたのですが，本当ですか？

**答．** 歴史的なことは詳しくないですが，そうだと思います.

**問．** 接弦定理の証明を教えてください.

**答．** 「接弦定理」とは何ですか？詳しく補足説明してください．定理の名前の付け方はいろいろあって，知っている定理でも，国によって，本によって違うことがよくあります.

**問．** パップス・ギュルダンの定理の証明ができません.

**答．** 「パップス・ギュルダンの定理」を知りません．詳しく説明してください.

**問．**トレーミーの定理とは何ですか？

**答．**知りません．詳しく内容を説明してください．

**問．**円周率を３にするくらいなら，もう教えないほうがよいような気がするのですが，どうでしょうか？

**答．**教えないほうがよい，というのは極端ですね．私 (石川) は 3.14 で教えると良いと思います．世の中，変えるべきことと変えてはいけないことがあると思いますが，基本的なことは，そうそう安易に変えてはいけないと考えます．

**問．**角の３等分のように不可能を証明することは価値のあることなのでしょうか？

**答．**価値があります．不可能であるというが証明されれば，多くの無駄な努力をしなくてすむことになります．新たな方向に人類の努力を向けられるというポジティブなメリットがあります．数学ではないですが，永久運動の不可能の証明は，人類の文明史の中で，大きなできごとですね．

**問．**メビウスの帯は何のために研究されているのですか？

**答．**単純におもしろいからです．ところで，関係ないですが，モーターのベルトにメビウスの帯を使ったものがあると聞いたことがあります．裏表がないので良い具合なのかも知れません．アイディアはどこにもころがっていますね．要は，それに気がつくかどうかですね．

**問．**「いくら足の速い人でも，前を歩いている亀を追い抜けない」というのは，どうやって矛盾を示すのですか？

**答．**無限のプロセスには無限の時間がかかるという思い込みからくるジレンマですね.「アキレスと亀」だったかな．亀がアキレスの前方 10 メートルのところにいるとします．アキレスは１秒で 10 メートル進むとします．(オリンピック選手なみですね)．その間に，亀は，１秒で１メートル進むとします．(スピーディーな亀ですね)．そこには，1.1 秒後にアキレスが着きます．そのとき，亀はさらに 0.1 メートル進み，1.11 秒後には，アキレスがそこに… と考えていくわけですが，$1.11111\cdots < 1.2$ なので，たとえば，1.2 秒後には，アキレスは亀をゆうゆうと追いこしているわけです．当たり前のことですね．

**問．**幾何学の中にも，かつてのフェルマーの最終定理のような難問は，今現在あるのでしょうか？比較的とっつきやすい問題を一つ教えてほしいです．

**答．**とっつきやすい難問と教えよ，とは難題ですが，強いて挙げれば,「ポアンカレ予想」ですか.「単連結３次元閉多様体は球面と同相か？」という予想です．

**問．**「仮説」とは数学的に重要なものですか？

**答．**数学では，仮説 (hypothesis) というより,「予想」(conjecture) という言い方をします．証明できるかもしれないけれど，証明できない主張は，予想として提示されます．予想をすること，それを解決することは，数学の発展の上できわめて重要です．ちなみに,「リーマン仮説」とよばれている有名で重要で，正しいかどうかまだわかっていない予想があります．

**問．**先生は幾何の定理を見つけたことがありますか？他の授業で量子論の話をされたとき，その先生は,「シュレディンガーが，波動方程式を導いたのは職人芸だ」とおっしゃっていたのですが，そういうものなのでしょうか？

**答．**そうですね．学者と職人は似ているところがあるかもしれません．定理を見つけたことはあります．その定理の重要性は問わないことにすると，私 (石川) は定理をたくさん見つけて証明しています．皆さんのイメージする幾何と，私 (石川) の研究している幾何は，たぶんだいぶ違うと思いますが… ところで，数学のプロで，自分の定理 (あるいは理論) を持っていない人は，はっきり言って「もぐり」です．

**問．**定理は何の為に暗記するのですか？定理を覚えるよりも公理から定理を導く方法を自分で考える方が大事な様に思えます．

**答．**その通りです．意外かもしれませんが，**定理は暗記するものではありません**．定理を覚えなければいけない，などと誰が言っているのでしょうね．こまったものです．

**問．**定理の証明法は，あらかじめ存在しているものを覚えておくのですか？

**答．**覚えていません．覚えられないし，覚える気もありません．覚えても意味がないからです．(証明の筋道はおもしろいので，いつでも再現できますが，細かい部分は気にしません)．ですから，皆さんも，たとえば，証明を聞いて,「あっ，それでいいのか？」と思ってくれるだけで，もう最高です．

**問．**メネラウスの定理の証明が思いつきません．発想できないのはセンスがないからでしょうか？訓練が足りないのでしょうか？発想できないとマズイのでしょうか？不安です．

**答．**思いつかなくて普通です．たとえば,「最後の晩餐」の絵を見て，とても同じように描けないと言って悲観する人はいませんね．おもしろいと思えれば良いです．論理的に納得できるだけでもよいです．なぜ映画の「家族ゲーム」のような不自然なすわり方をしているのか，などと思ってもよいわけです．

**問．**自分で補助線を探したりする作業はしないのですか？今までのところ自分で考えたりすることがあまりないように感じますが，そういうことは講義の中では行われないのでしょうか？

**答．**できれば，自分で考えることは自主的にやってください．自分で考えるには長い時間がかかりますが，講義時間は短く，たった９０分しかありません．ちなみに，大学の講義１コマ (９０分) に対して，２倍の時間，つまり３時間ぐらい自宅学習 (下宿学習，寮学習) は少なくとも必要だと思います．当たり前のことですが，皆さんは，勉強する (脳を鍛える) ために大学に入学したわけですね．

**回答者から．**皆さんが誤解しているかも知れないので確認しておきますが，この回答書には，良い質問はなるべく載せるようにしていますが，(回答もれもありますが)，取り上げられたからといって評価が高いとは限りません．逆は必ずしも真ならず．悪しからず．ところで，質問書で教えてもらいましたが，花粉症は，注射を一本うっておけば，その年は出ないそうですね．ありがとう．でも，私 (石川) は注射がきらい，医者にかかるのがきらいなんです．こまったものです．ではまた．