平面幾何の旅・質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 2 (２００１年４月２４日) の分

問. 三角形の五心の現代社会における意義は何ですか？何のために求めるのかわかりません.

答. こんにちは. 花粉症で苦しい日々です. さて, 回答ですが, 三角形の五心が現代社会で重要であると主張するつもりは毛頭ありません. じゃあ, 重要でないのなら, なぜそれを教えるのか？それは, この講義「平面幾何の旅」の教材 (訪問先) として適当であると考えるからです. 平面幾何や射影幾何の主要な定理を見てみると, ３直線が１点で交わるかどうか (共点), ３点が１直線上にあるかどうか (共線) という結論のものが多いのに気付きます. その一番簡単な例が三角形の五心の存在定理です. まず, 三角形の五心という, 皆さんになじみ深い教材を通して, これから説明していく平面幾何の定理や証明の仕方に慣れてもらおう, ウォーミングアップをしてもらおうという企画です. 寄席で言うと, 三角形の五心は, いわば前座です.「じゅげむじゅげむで口ならし」の段階です. それでは, 平面幾何のようなすぐには役に立ちそうもない基本的なことをなぜ講義しているのか？もちろん, 実用に比較的近い講義もたくさんあり, 皆さんもそれらを受講していると思います. ただ, 今日役に立つことが明日は役に立たなくなる, という変化の激しい現代社会では, その変化を追いかけることも大切ですが, その変化に流されない基礎的な思考力, 判断力, コミュニケーション能力を身につけることは, より重要です. この講義のような「ほのぼの数学」の授業を受講している皆さんには, 心に十分余裕があるので, この講義で説明しているような基本的なことがらの意義やおもしろさを理解してもらえると期待しています.

問. ３角形の５心の有用性は何ですか？たいして日常生活に役立っておらず, 数学者の趣味ではないか, と思っています. ごう慢な言い方になってすみません. 分かりやすい授業です.

答. 「分かりやすい授業」と書いてくれてありがとう. おせじでもうれしいです. さて,「数学者の趣味」といえば, もっと難しいことを教えたい, もっと役に立たないことを教えたいというのが本音です. 三角形の五心は趣味ではありません. そこを我慢して, 基本的な数学の講義をしているということをご理解ください. ところで, 日常生活にすぐに役に立つこと, たとえば, インターネットの検索の仕方とか, コンビニでの買い物の仕方とか, キャッシュディスペンサーでの現金のおろし方を教えた方が有益でしょうか？それは有益ですが, そんなことは誰でもすぐにわかることなので, わざわざ大学で教えることはないですね. では, 日常生活で役に立つが, 誰にもすぐにはわからないこと, たとえば, 株で確実に儲ける方法とか, 絶対にリストラされない方法とか, 必ず幸せになる方法などは, 大学で教えられません. そんなことは誰も教えることはできません. 自分で考えるしかありません. 教えることができるのは, 皆さんが, 視野を広げ, 自分でものごとを考える能力を高め, 自信と誇りを持って生きていく, その手掛かりになるかもしれない事だけです.

問. ３直線が１点で交わるのは, 特別な場合というより, あまり特別でないときではないですか？

答. 何が特別か, ということは問題ですが, 皆さんが適当に直線を２本引くとすると, 偶然平行でない限り, １点で交わると思います. そして, もう１本直線を引くと, だいたいその交点は通らないはずです. つまり, ３直線が１点で交わること (共点という状態) は普通起きないことなので, 特別と言ったわけです.

問. 公理は証明できないのですか？公理を裏付けるものはないのですか？公理は本当に正しいのでしょうか？「平行線の公理」は何をもってそうだと言い切れるのですか？

答. 公理は証明できません. というより証明しません. 公理は認めるものです.「公理主義」は, 公理を「正しい」ということにして, それを出発点としよう, という発想です. この発想が古代ギリシャ数学の神髄です.

問. 公理はどこから出て来たのですか？

答. いろいろな経験から帰納的に導かれたものと言えます. 演繹的に導かれたものではありません.

問. 公理から全ての定理を証明することができるのですか？定理とはいくつぐらいあるものなのですか？

答. 証明できるものを定理とよびます. 定理の数を数えることはできません.

問. まだ発見されていない定理はあるのですか？

答. 発見されていないので, あるのかないのかわかりませんが, まだまだあると考える方が妥当であると思います.

問. 定理は公理にすべて基づいているのですか？

答. そうです. 用語の定義 (たとえば直角の定義など) は, 定理を簡潔に述べたり, 推論をやりやすくするためだけものです. さかのぼれば, 定理は, 公理に出てくるような直線とか長さなどの用語だけで述べられ, 公理だけから論理的に導かれるということです. そういう意味で他のことは使われません. もちろん, 用語の定義がないと, 定理はものすごく長くなるでしょう. 定理の証明をすることも実際は不可能になるでしょう. でも原理的には公理だけに基づいています.

問. 図形の証明問題は, そのつど公理からの証明が必要不可欠なのですか？

答. 問われれば, 公理にさかのぼれるということが大事です. 実際は, 公理から基本的な定理を証明しておいて, それらの定理を使って証明することになります. このことは他の数学の分野でも同じです.

問. ある定理を証明するのに, 他の定理を使ってもよいのですか？

答. よいです. 他の定理が, 公理から導かれるか, 公理から導かれる定理から導かれれば, その証明をつないでいけば, その定理に関して, 公理からの直接証明が書けるからです.

問. 中学のときの図形の授業で「定理とは定義から導かれる」と教えられました.

答. たぶん, 公理は大前提として使って, その上で定義にしたがって証明しなければいけない, という意図でしょう. 中学生の段階では, たとえ公理をのべても, 当たり前すぎてピンとこないだろうから, 通常, 公理には触れません.

問． 平面幾何では証明と言うことは必要なのですか？作図でわかることを証明する必要がありますか？

答． 必要があります．作図をすることは大切なことですが，作図をしてわかることは，あくまで，その図に対してだけです．他の場合について，一般的に成り立つことを言うには，証明する必要があります．

問．「図から明らか」という書き方では，数学の証明法としては説得力がないですか？

答． 残念ながらありません．厳密な証明をしたあとで，それをわかりやすく人に伝える場合は，図で納得してもらうというのは有用な方法ですが．

問． ニワトリが先か，タマゴが先か，ということなんですが，数学の言葉はどれが先にあって，それによって定義されるのはどれか，というのが明確にわかりません．

答． なかなか難しいですよね．気になったときは，定義をさかのぼりながら書き下すと整理できます．

問． 平面幾何の３番目の公理「$\triangle ABC$ について $AB < AC + CB$ 」は他の公理を用いて証明できないのですか？これは公理というより，定理のように聞こえます．

答． できません．いくつかの公理を基に定理を導いていく場合，その公理のあつまりを「公理系」といいます．公理系はお互いに矛盾してはいけません．そりゃそうです．このとき，公理系は「無矛盾」であるといいます．また，公理系は少ない方がよいので，他の公理から導かれる定理が，公理系に入っていたらよろしくありません．どれも他の定理から導かれない公理からできている無駄のない公理系を「独立」であるといいます．**公理系は無矛盾で独立であることが要請されます**．ところで後世に「学問の体系」が作られる場合，多くはユークリッド幾何の体系を(不完全ながら) 模倣していることが多いようです．

問． 公理「$\triangle ABC$ について $AB < AC + CB$ 」は，距離の公理の三角不等式そのものになってしまいます．

答． そうです．三角不等式です．｢距離」という概念は，この公理から抽出されたと言えます．

問． 平面幾何の分野ででてくるユークリッドさんらの定理を生み出した時の証明を見たいです．

答． ユークリッドの「幾何学原論」の日本語訳を読むとよいと思います．図書館にももちろんあるし，大学生協の書籍部でも立ち読みできますね．

問． 平面ユークリッド幾何の公理はどんな幾何の証明にも通用する万能のものなのですか？

答． ちがいます．平面ユークリッド幾何の証明だけに通用します．でも，**公理という大前提から定理を導くという精神は，幾何に限らず，どんな学問にも有用です**．

問． 公理「３角形は３つの角の大きさと３つの辺の長さを変えないでその位置を変えることができる」の中で，「位置を変えることができる」という意味ですが，同一平面においてですか，それとも違う平面においてですか？

答． 何が同じで何が違うか，というのは難しいですが，同一平面において議論する，というのが平面ユークリッド幾何であると考えられます．立体幾何では，いくつかの平面を空間のなかで考えます．

問． 数理系なので，幾何は初めてですが，平面幾何の１番目の公理「３角形は３つの角の大きさと３つの辺の長さを変えないでその位置を変えることができる」が，いったい何を言いたいのかさっぱりわかりません．国語力が低下しているのでしょうか？

答． 動かすことができる，という意味です．現代数学を知っている人には，かえって奇異な表現に見えると思います．小平邦彦さんは，平面幾何は「図形の科学」であると言っています．現代的な目でみると，厳密性に欠けると考えられるかも知れません．ところで，国語力がないと数学はできません．皆さんは大丈夫と思いますが，国語力 (自分の考えを人に上手に伝える能力) は日頃から鍛えておきましょう．

問．「２直線の錯角が等しいならば，その２直線は平行である」の背理法による証明が分かりにくいです．

答． ℓ と m が異なる２直線で，錯角が等しいのに平行でない (交点をもつ) と仮定して，$\ell = m$ を導いたというのが証明の筋道です．

問． 錯角の定義は何ですか？

答． ２直線 ℓ と m に，別の直線が２点 A, B で交わるとき，直線 AB に関して反対側にある ℓ と m の半直線と，線分 AB でできる２つの角を言います．でも,「角」とは何か,「反対側」とは何かということの定義は省略します．

問．「２直線の錯角が等しいならば，その２直線は平行である」の証明ですが，背理法を使わずに考えてみました．

答． 同様の質問がいくつかありました．その心意気，評価します．その上で，寄せられた証明を読むと，３角形の内角の和が 180 °であるという定理 (あるいは，長方形の対辺は平行という定理) を使っています．ですから,「３角形の内角の和が 180 °である」を，証明しておかなくては，証明が完成しませんね．結局は，どの定理を先に (時間的に先に，ではなく，論理的に先に) 示すかという問題なのですが，この講義は,「２直線の錯角が等しいならば，その２直線は平行である」という定理を使って,「２直線は平行ならば，その２直線の錯角が等しい」という定理そ示し，それを使って,「３角形の内角の和が 180 °である」という定理を導くという流れです．

問． 三角形の内角の和が 180 °になるのはなぜですか？

答． 三角形の１頂点を通り，対辺に平行な直線を引き,「２直線は平行ならば，その２直線の錯角が等しい」という定理を使うとすぐに証明できます．

問． 講義で「2 $\angle R$ が直線であるというのはいいんですか？」という質問が出たときに,「これは定義です」と先生が言っていたのがいまいちよくわかりません．

答． 直角 $\angle R$ の定義は，平角の半分で，平角の定義は，直線の作る角度，というものです．

問． なぜ 90 度を $\angle R$ と書くのですか？

答． 直角は英語で right angle, その頭文字を取っています．

問． 背理法で証明されたものは本当に正しいのですか？

答．背理法は論理的に正しい方法です．つまり,「P ならば Q である」という命題が真であることを証明するために，P であり，かつ，Q でない，と仮定して矛盾を導く方法ですね．P であり，かつ，Q でない，と仮定して矛盾が出るということは，P であり，かつ，Q でない，という場合はない，ということですね．つまり，P あれば，必ず Q でなければならない，つまり,「P ならば Q」が真であることになりますね．

問．背理法って数学というより文系の分野っぽいですね．

答．そうですか．数学自体がいわゆる文系的な要素を持っていますね．他の自然科学もそうかもしれません．量子力学で有名なハイゼンベルグのエッセイ「部分と全体」(山崎和夫訳，みすず書房) の冒頭に「科学は人間によってつくられるものであります」とあります．現在は，文系の分野でも理系のセンスが必要とされています．そもそも，私 (石川) は理系，文系の区別は本質的なものとは思っていません．

問．「２直線の錯角が等しいならば，その２直線は平行である」の証明で公理 III「$\triangle ABC$ について $AB < AC+CB$」を使っている部分がわかりません．

答．公理 II「２点を通る直線はただ１つ存在する」の書き間違いです．すみません．自慢ではないですが，私 (石川) はたまに書き間違います．ひどいときには，頭で考えている事と，口で言っている事と，黒板に書いている事が，全部ばらばら，ということもあります．こまったものです．間違いを見つけたら，ぜひ指摘してくださいね．

問．三角形の４心 (内心，重心，外心，垂心) は，正三角形以外で一致することがあるのでしょうか？

答．ありません．内心と外心が一致すれば正三角形です．すぐ証明できます．

問．チェバの定理の点 P は，三角形の外部でも成り立つのでしょうか？

答．成立します．そのように定式化してあります．

問．ユークリッド平面幾何と同様のものが空間についてもあるのでしょうか？

答．あります．ユークリッドの幾何学原論の後半の部分に，立体幾何が書いてあります．

問．今まで学んできた命題には，真の命題と偽の命題があったのですが，今日の講義では，命題とは「軽い定理」だと説明がありました．

答．数学で使う「命題」という用語には２つの意味があります．１つは，論理学でいう命題で，真偽が判定できる主張を意味します．もう１つは，定理と同じ意味で使います．つまり「正しい命題」のことです．普通は，定理は重要なものを言い，それほど重要ではないとか，重要な定理を導くための途中の定理を命題ということがあります．似た言葉に「補題」とか「補助定理」という言葉もあります．

問．逆の命題が成り立たないのはどういう場合ですか？

答．多くの場合に成り立ちません．たとえば,「犬は哺乳類である」の逆「哺乳類は犬である」は正しくありませんね．

問．平面幾何は現実の世界からできた学問だと思いますが，現実社会の法則で幾何の世界で証明されていないものはないのですか？

答．そもそも現実社会の法則を証明することは不可能です．たとえば,「平面」や「直線」というものは現実には存在しませんね．現実は複雑なので，何らかの「モデル」を構成して，いくつかの公理 (仮説という場合もあります) をもとに論理的に導かれる定理 (結論) を，実験，フィールドワーク等のデータと比較して，また仮説を修正して，結論をデータと比較する，このくり返し，というのが学問の基本的な姿です．現実からできたのは確かですが，現実のことを証明しているとは考えないで，あくまで「モデル」の中のことである，というのが妥当と思います．

問．なぜ「非ユークリッド幾何」が生まれたのですか？

答．歴史的には,「平行線の公理」を他の公理から導こうとして，挫折した後で生まれています．

問．先日，微分積分学の授業のときに，三角形の内角の和が 180 °になるのは，いま僕の生きている空間だけだとおしゃっていました．

答．たとえば，平面ではなく，球面の上では,「三角形」の内角の和は 180 °より大きくなります．

問．前回の質問の中に，平面とは面積をもたない直線の集合なのに平面が面積を持つのがおかしいというのがありました．また，その答として，連続無限個あわされば面積が生じるということになっていますが，僕はどうしてもこの考え方が納得できません．完全な 0 に ∞ をかけても 0 だからおかしいと思うのです．$0 \times \infty = 0$ は確実に正しいと思います．

答．∞ は数ではないので，$0 \times \infty$ という計算自体に意味がありません．それに，よく考えてみると，面積とは何かという定義がはっきりしていないので，このような計算と面積の話とは関係がありませんから，あくまで「たとえ話」としてしか結びつきませんね．このように，面積とは何かということを曖昧にしているために生じてしまったジレンマと言えます．

問．円の面積や周は計測できないのですか？

答．「計測する」というのは，どういう意味がはっきりしないのですが，実際に計ると，当然「誤差」が出ますね．

問．円は特別な曲線ですか？

答．特別な曲線です.「ある点 (中心) から距離が一定の点の軌跡」という特別な性質 (これが円の定義) を持ちます．

問．素数というのは図形と関係があるというのは本当ですか？

答．補足説明を読んだのですが，良くわかりませんでした．数と図形は密接に関係しているのは確かですが．

問．「$a^3 + b^3 = c^3$ を満足する自然数は存在しない」の証明に，どのように楕円 (だえん) を使うのですか？小学生のころに証明され，どこかの先生に簡単な話をされたような気がするのですが，何分７年以上前のことなので覚えていません．

答． ここでは，詳しい説明ができませんが,「楕円曲線」というものを使います．楕円曲線は，楕円の周の長さの計算から生まれた「楕円関数」から作られるものです．ところで，この質問を読んで，フェルマーの最終定理が証明されたのは，ついこの間のことと思っていた私 (石川) は，自分の歳を感じて愕然としました．

問． 幾何学は，工学とくに機械へ応用されますか？

答． 応用されます．たとえば，ロボット工学や制御理論 (せいぎょりろん) に盛んに応用されています．

問． 角の３等分ができたらフィールズ賞がもらえますか？

答． もらえません．そもそも不可能なことが証明されていますが，たとえ，その種のことを解決しても，たぶん無理でしょう．それは，現代では，その問題そのものは重要ではないと思われているからです．ただ解けただけでは,「ああそうですか」で終わります．ただし，もしその問題自体あるいは，その問題を解決する方法が，他の数学の分野や，それ以外の分野へ大きな影響を持つと判明した場合には，その問題の解決は重要な業績と考えられます．

問． 外心を中心とした円に関する面白い性質を見つけたのですが，自力では証明できません.「鋭角三角形の外心 0 を中心とし，半径が $\triangle ABC$ の外接円の半径よりも大きい円上に点 P をとり，点 P から辺 AB, BC, CA におろした垂線の足をそれぞれ E, F, G とするとき，$\triangle EFG$ の面積は一定である.」

答． ベクトルと微分 (ベクトル解析) を使うと，おおよそ次のように証明できると思います．(証明しても証明したという実感のわかないような証明です．この講義で説明している内容のようなエレガントな証明があると思いますが，わかりませんでした．この件について，何か情報があれば教えてください)．A, B, C, P の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}$ とすると，E, F, G の位置ベクトルは，それぞれ $\mathbf{e} = \mathbf{b} + \dfrac{(\mathbf{x}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})}(\mathbf{a}-\mathbf{b}), \mathbf{f} = \mathbf{c} + \dfrac{(\mathbf{x}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})}{(\mathbf{b}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})}(\mathbf{b}-\mathbf{c}), \mathbf{g} = \mathbf{a} + \dfrac{(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}{(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ となります．$\triangle EFG$ の面積を S とおくと，$2S$ はベクトル積 $(\mathbf{e}-\mathbf{f})\times(\mathbf{f}-\mathbf{g})$ の長さになります．$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ が外接円の r 倍の半径の円上を動くとき，点 $\tilde{P} : \mathbf{y} = \dfrac{1}{r}\mathbf{x}(t)$ は外接円上を動きます．t で微分すると，$\{(\mathbf{e}-\mathbf{f})\times(\mathbf{f}-\mathbf{g})\}' = (\mathbf{e}'-\mathbf{f}')\times(\mathbf{f}-\mathbf{g}) + (\mathbf{e}-\mathbf{f})\times(\mathbf{f}'-\mathbf{g}') = r\{(\tilde{\mathbf{e}}'-\tilde{\mathbf{f}}')\times(\tilde{\mathbf{f}}-\tilde{\mathbf{g}}) + (\tilde{\mathbf{e}}-\tilde{\mathbf{f}})\times(\tilde{\mathbf{f}}'-\tilde{\mathbf{g}}')\} = \mathbf{0}$ となるので，$\dfrac{dS}{dt} = 0$ となります．ここで，点 $\tilde{P}$ からおろした垂線の足の位置ベクトルを $\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}$ として，シムソンの定理 ($\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ が共線) を使いました．したがって，$\triangle EFG$ の面積 S は一定です．こんな証明でいかがでしょうか？

問． 中国語で「幾何」と書くのは，geo の音をとったためで,「ジホ」と読むらしいです．

答． ありがとう．前回の回答書で,「幾何学というのは，なぜこのような名前に命名されたのですか？」という質問に対し,「英語の geometry は地球と関係する ”geo” から来ている言葉でしょう.「幾何」ということばは中国から来たことばですが，語源は知りません．専門家として即答できないのはお恥ずかしい限りです．調べてみましょう.」と答えたのですが，その回答がさっそく寄せられました．対話型の講義をしているかいがあります．

問． 回答書にあるように数式を書く方法を教えてください．

答． この回答書は「Tex」(テフ)，正確には「Latex 2ε」(レイテフ・ツーエプシロン) というパソコンソフト (理系の論文を書くときに使うソフト) を使って書いています．

問． 現在私達のやっている問題は，もしかしたらすべて「平行線の公理」のようなもので，未来の幾何学への準備なのではないでしょうか？

答． そうかも知れませんし，そうでないかも知れません．誰もわからないから，手を抜かずにがんばるしかないわけです．それが研究というものです．研究の極意「見逃さない，手を抜かない，こだわらない，あきらめない」．

問． 現在幾何学にたずさわっている人は何をしているのですか？

答． いろいろな幾何学の体系 (微分幾何，位相幾何，代数幾何など) で，定理を見つけ，定理を証明しようとがんばっています．そして，新しい幾何学の体系を作ろうとしています．

問． 先週書いた質問が回答に載っていないのはなぜですか？とるに足らない質問だったのでしょうか？それとも意味が通じなかったのでしょうか？

答． 難しくて答えられなかったからかもしれないし，単純に回答し忘れただけかもしれません．すみませんが，この講義の初回に渡したプリントに書いておいたように，そのような場合は，直接質問するか，あるいは再度詳しく質問書に書いてみてください．

問． 難しい質問をしようとすればするほど基本的な事項に帰結していく様な気がします．

答． その通りです．そのことが皆さんにわかってもらえたら，質問書を書いてもらっている意義があるというものです．

問． 講義が不安定です．

答． 講義内容を断定的に決めてほしい，ということだと思います．そういう授業に慣れているとそう思うのも仕方ないと思いますが，皆さんのからの反応をある程度講義に取り入れたいと考えています．皆さんが受け身ではなく，積極的に授業に参加して，講義を活性化することを期待しています．

問． 授業の内容が理解できた場合，質問書に書けることが少なくなると思うのですが．

答． 違います．そう考えがちなのはわかりますが，本当に内容が理解できたらなら，当然，次々に疑問がわいてきますね．質問がない，というのは，講義の内容が十分に理解できていない証拠です．良い質問が書けるように，良く勉強してください．ではまた．