平面幾何の旅・質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. １０ (２００１年6月２６日) の分

問. 今回入った平面幾何の考え方には，長さは必要ないのですか？資料を見ると，角の大きさは問題にされているのに，長さについて書かれていません.

答. こんにちは．７月１０日は出張のため残念ながら休講です．また，７月１７日がこの講義の最終回 (千秋楽) となります．それから，レポートの締切りは７月３１日の正午です．忘れないで提出してください．さて回答ですが,「長さは使うが気にしない」というのが適切だと思います．資料には書いていませんが，１つ１つの折れ線を決めるためには，長さ (距離) は必要です．出発点と，進む方向と，どれだけ進んだあとで，どれだけ曲がるか，を指定しないと，折れ線は決まりませんね．でも，トポロジーの考え方として，**許容変形** (**正則ホモトピー**) **で不変は性質** (**または不変な量**) **に注目する**ので，長さは気にしません．許容変形を使えば，それだけ進んで曲がるか，ということは，自由に変えられるからです．早めに曲がったり，おそめに曲がったり，できるからです．同じように,「角度も使うが気にしない」．個々の曲がり角の角度は気にしないで，角度のトータルだけを気にしています.

問. 閉じた折れ線は，可微分曲線ではありませんよね．ホイットニーの定理は，可微分曲線に関するものと書いてありますが，折れ線にしたら微分できなくなりませんか？

答. たしかに，折れ線は，可微分曲線ではありません．可微分曲線とは，媒介変数 t に関して微分可能な関数 $x(t), y(t)$ を使って $(x(t), y(t))$ と表される曲線のことです．たとえば，円は，$x(t) = a\sin t, y(t) = a\cos t$ で表される可微分曲線です．通常は，さらに仮定 $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ を付けます．折れ線は，この仮定をみたす可微分曲線ではありません．ですから，この講義で紹介する定理は，厳密に言えばホイットニーの結果そのものではなく，折れ線の場合に (ホイットニーの精神を正しく引き継いで) 翻訳したものです.

問. ガウス指数は，折れ線でしか成り立たないように思えるのですが.

答. そうです．資料にある定義は，閉じた折れ線に関するガウス指数の定義です．閉じた可微分曲線 $(x(t), y(t)), a \leq t \leq b, (x(a), y(a)) = (x(b), y(b)), (x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ に対しては，ガウス指数は，速度ベクトルの方向 $\theta(t)$ の回転数として定義されます．つまり，$(\cos\theta(t), \sin\theta(t)) = \dfrac{(x'(t), y'(t))}{|(x'(t), y'(t))|}$ とおいたとき，ガウス指数は，$\dfrac{1}{2\pi}\int_a^b \theta'(t)dt$ で定義されます.

問. 曲線に時計回りも反対もないようにみえます.

答. そうですね．ここでは曲線に「向き」が与えられているとしています．向きがあれば，その進行方向が時計まわりか反時計まわりということが定まりますね．たとえば，陸上競技は，反時計まわりです．競馬は時計まわりです．逆走すれば，反対になります.

問. 許容変形についての説明で,「共有する辺に，折れ線の角を含んでいても良いが，その角で隣り合う折れ線の線分とは交わらないもののみを許す」言われても，何のことだかさっぱりわかりません.

答. 講義で図を使って説明すれば一発でわかります.

問. ガウス指数の範囲はどのくらいですか？

答. すべての整数 $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$ を取り得ます.

問. 正則ホモトピーとは何ですか？

答. 閉じた可微分曲線 $(x(t), y(t)), a \leq t \leq b, (x(a), y(a)) = (x(b), y(b)), (x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ の正則ホモトピーとは，別のパラメーター s に依存する曲線の族 $(x_s(t), y_s(t)), a \leq t \leq b, (x_s(a), y_s(a)) = (x_s(b), y_s(b)), (x_s'(t), y_s'(t)) \neq (0, 0)$ を経由して，もとの曲線を変形していくこと (またはその曲線族) のことです.

問. 「曲面にも正則ホモトピーの概念がある」とはどういうことですか？

答. 上の回答を，曲面に対しあてはめたものです．厳密な定義については，長くなるので省略します.

問. 角 (かど) の定義は何ですか？

答. 「特異点」とも呼びます．パラメーター付けられた曲面 $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ のヤコビ行列 (3×2 行列になります) の階数が 1 または 0 のとき，その曲面は角 (かど) をもつ，あるいは特異点をもつといいます．古典的な曲面論は，通常，特異点のない曲面に対してのみ成り立ちます.

問. ホモトピーというものがよくわかりません．図形の変形の様子を数学的に記述するのに必要なことですか？

答. 必要なことです．位相幾何 (トポロジー) という分野がありますが，ホモトピーという概念はトポロジーでは基本的な概念です．その場合，通常は，ホモトピーについては，連続性のみを要請するのですが，正則ホモトピーでは，特異点が途中に現れないということを要請しているので,「正則」という形容詞がつくわけです.

問. スメールの定理がわかりません.「球面は正則ホモトピーを経由して裏返すことができる」の,「裏返す」というのは，単純に服を裏返すといった感じの意味なのでしょうか？つまり，球面の裏側の面を表にひっくり返すということですか？

答. その通りです.

問. 「スメールの定理」の証明はどのようになるのですか？普通に考えて，ボールなどの球をそのまま裏返すことはできないですよね．証明でも，球面のどこかに切れ目が入っていることになっているのですか？

答. 切れ目は入れません．切れ目を入れてよいのなら，簡単に裏返せますね．切れ目を入れると連続的な変形とは言えません.「切れ目をいれなくても裏返すことができる」というところが驚くべきことなわけです．ただし,「正則ホモトピー」では，自己交差は許しています．自分自身と交差してもよい．でも，これからお話する，曲線の話で感じがつかめると思うのですが自己交差をゆるした滑らかな曲線のままで，球面を裏返すことができるなんで，とても想像できません．多くの人がそうだったなので，実は球面を裏返すことができるよ，ということを史上はじめて数学的に証明したスメールは偉い人なわけです．彼は球面を裏返すような正則ホモトピーの存在を数学的に証明しました.「代数トポロジー」の手法が使われました．ちなみに，スメール先生もフィールズ賞を受賞しています．でも，裏返すことができるということはわかった後でも，具体的な裏返しかたは，すぐにはわかりませんでした．その後，多くの数学者が具体的な裏返し方の構成を見つけようと努力し，とくにフランスの盲目の数学者のモラン先生が非常に簡単な裏返し方を構成しました．どう裏返すかという過程がビデオになって市販されています．(これは以前の回答書で，すでに紹介している通りです).

問. 射影平面で関数式を用いることができる理由がわかりません.

答. 良い質問ですね．射影平面の射影直線は，３次元空間 $\mathbf{R}^3$ の原点を通る平面でした．その平面の方程式は，$ax+by+cz=0$ という形の式で表されますね．そこで，これをそのまま射影直線の方程式とみなすわけです．普通の平面が $z = -1$ にある

とすると，$z=-1$ を $ax+by+cz=0$ に代入することによって，普通の平面内の普通の直線の方程式 $ax+by-c=0$ が得られます．そして，普通の平面の２次曲線 $ax^2+by^2+cxy+ex+fy+d=0$ は，射影平面で考えるときは，方程式 $ax^2+by^2+cxy+exz+fyz+dz^2=0$ という２次同次式で表されます．

問． $ax^2+by^2+cxy+ex+fy+d=0$ で定まる曲線が２次代数曲線とのことですが，$c=0$ でなくてもよいのですか？

答． よいです．たとえば，$xy-1=0$ は立派な双曲線です！

問． 射影平面上では，放物線，双曲線，楕円の区別はないということですが，違いは，無限遠直線の選び方 (無限遠直線と交わらない，接する，交わる) のみであるからですね？

答． まったくその通りです．わかってもらって先生 (石川) はとてもうれしいです．

問． 二次曲線のうち，閉曲線 (無限遠点がない曲線) なのは，円，楕円だけですか．また，三次曲線の閉曲線はありますか？

答． その通りです．３次曲線で閉曲線であるものは存在しません．このことは,「３次方程式には必ず実解 (実根) がある」ということからわかります．

問． 双曲線が無限遠点で交わるのがイメージできません．

答． 「双曲線が無限遠点で交わる」ではなく,「双曲線が無限遠直線と交わる」です．

問． 「射影平面では双曲線は交わる」とありますが，それは漸近線を通りこして離れていくのですか？

答． そうです．この状況を上手に記述するために，無限遠直線を (射影変換を使って) アファイン平面上の直線に移動すると，もとの双曲線は，その直線と２点で交わる楕円になります．そして，もとの双曲線の２本の漸近線は，その２点での楕円の接線に移ります．

問． 「放物線が無限遠で交わる」というのが納得できません．

答． 次のような説明ではどうでしょうか？放物線 $y=x^2$ を考えましょう．xy 平面の原点の上に立って，y 軸の正の方向を見ると想像してください．そのとき，(y 軸中心の) 任意に狭い視野 (角度) に限っても，放物線上の十分遠くの部分は，その狭い視野に入ってきますね．(この部分は，皆さんも数式を使って確認してください)．このことから，放物線の無限遠直線との交点は，１点であることがわかります．

問． $y=\tan x$ についても無限遠点は存在しているのでしょうか？

答． グラフが無限に伸びているので，そうですね．無限遠直線上の１点から，無限本の枝が伸びている状態です．無限遠直線附近の状況を詳しくしらべるには，３次元空間で，曲面 $y=z\tan\dfrac{x}{z}$ を考えるとよいです．

問． 「複素平面で考える」とは，単に虚軸を用いることですか？

答． そうです．たとえば「曲線」$x^2+y^2=-1$ について，x,y を両方とも複素数とします．すると，たとえば，$x=i,y=0$ は方程式を満たしているので，複素平面上で考えた曲線 $x^2+y^2=-1$ 上にあると考えるわけです．

問． パスカルの定理で，Λ が固有２次曲線であるというのをどこで使っているのですか？

答． パスカルの定理の証明 (3.10) では，その前の項目 (3.9) の結果を使っているのですが，そこで固有２次曲線であると仮定しています．

問． パスカルの定理で，３点 P,Q,R の取り方は，他の交点でもできるのではないかと思います．

答． できます．講義で紹介したパスカルの定理の証明を眺めてもらうと，固有２次曲線上の６点の並び方はいっさい使っていません．６点をどこにとっても，どう名前をつけても，(たとえば，A,B,C,D,E,F を入れ換えても)，成り立ちます．ですから，どの組み合わせで３点 P,Q,R を決めても，一直線上にあるわけです．

問． ２次曲線に内接する六角形におけるパスカルの定理は，さらに拡張できるのではないでしょうか？

答． 確かに拡張できますね．

問． 直線が曲線に含まれるというのは，納得いきません．曲線という日本語が気に入りません．楕円は曲線に含まれるのでしょうか？こうなると，曲線は平面上の図形をすべて表すことになると思うのですが．

答． 言葉使いの問題なので，他の人とコミュニケートできれば何でもよいのですが，通常，特殊な曲線として直線をとらえることが多いということです．曲線は，英語では curve (カーブ) です.「カーブ」と訳すと,「曲がり角」という意味になりますね．line (ライン) という言葉も使われますが，これは，直線 (streight line) という意味と，曲線 (curved line) という意味の両方に使います．文脈で理解しなければいけません．ところで，楕円はもちろん曲線に含まれます．ただし，あくまで１次元的な図形を曲線とよぶので,「面」たとえば，円盤などの，平面領域自体は曲線とは言いません．境界は曲線ですが．

問． 複素数平面において，虚数乗とはどんなことなのでしょうか？i^i は何ですか？

答． 正の実数 a に対し，その複素数乗 a^z は確定した数値になります．(定義は $z=u+iv$ のとき，$a^z=a^ue^{iv\log a}$ です)．しかし，a が正の実数でなければ，その複素数乗は「多価関数」になります．一つの値には定まりません．たとえば，$(-1)^{\frac{1}{2}}$ は i と $-i$ の２つです．したがって，i^i も１つの値には確定しません．たとえば，$i=e^{\frac{\pi}{2}i}$ なので，$i^i=(e^{\frac{\pi}{2}i})^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$ とも計算できますが，$i^i=(e^{\frac{5\pi}{2}i})^i=e^{-\frac{5\pi}{2}}$ とも計算できてしまいますね．

問． トポロジーとは何ですか？位相幾何とは，角度を中心として見た幾何学なのですか？

答． 違います.「図形のつながり具合」に着目した幾何学というのが適切だと思います．

問． トポロジーと一筆書きはどのように関係しているのですか？

答． 一筆書きができるかどうかは，角度とか長さに関係しない「トポロジカルな性質」です．

問． 平面のオイラー数はどのようにして導かれるのですか？

答． 平面のオイラー数は１です．オイラー数はトポロジーで基本的な不変量です．発見されたものだと思います．

問． 昔，予備校に通っていたとき，予備校の先生が，大学でトポロジーをやっていたというのを少し聞きましたが，トポロジーは，比較的新しく，まだわからないところが多いのでしょうか？

答． そうですね．比較的あたらしく，まだわからないことが多いです．でもどんな分野でもわからないところは多いと思います．どちらかというと，人類がわかっていることなどほんのわずかですね．

問． トポロジーは，平面以外 (３次元から n 次元) でも成り立ちますか？

答． もちろんあります．３次元トポロジー，４次元トポロジーは現在活発に研究されています.「ポアンカレ予想」は未解決問題です．(以前にも回答書ですでに書いています)．

問． サッカーボールのように，違う正多角形を用いて球を作るには，正５角形と正６角形のペア以外にあるのでしょうか？

答． おもしろい問題ですね．私 (石川) は知りません．ぜひ，考えてみてください．

問． 特異点とは何ですか？「スタートレック」を見ていたらでてきました．どうやら，ブラックホールのような言いかた

でした．

答．「特異な点」です．他の場所に比べて特異な点を指します．いろいろな分野で，特異点は現れます．宇宙物理学なら，ブラックホールや，ビッグバンは特異点です．数学の分野でも，曲線論，曲面論，関数論，多様体論，のいたるところに，特異点が顔を出します．また,「視覚の理論」でも特異点は重要です．皆さんが，物を見るとき，その「輪郭」(りんかく) を意識しますが，その輪郭は特異点です．人の顔の目や鼻や口や耳は特異点です．特異点がないと，どちらが前がわからないし，誰の顔か分からなくなります．ちなみに，私 (石川) の専門は「特異点論」です．

問．円錐のとき，頂点の次元が変わるような気がするのですが，これは勘違いなのでしょうか？

答．よいところに気がつきました．でも，すこしだけ勘違いです．頂点は，そのまわりの面があってはじめて，頂点であるとわかるわけで，そのまわりの状態も記述しようと思うと，曲面なので，２つのパラメーターが必要ですね．ですから，頂点でも２次元です．

問．「多様体」とはいったいどのようなものですか？

答．球面やトーラスなど，各点の近くでは，ユークリッド空間と同じようになっている図形のことです．

問．ゆがんだ空間を扱う幾何というものはありますか？

答．あります．リーマン幾何です．アインシュタインは，リーマン幾何を使って，重力理論を幾何学化して，一般相対性理論を作りました．２０世紀前半のことです．現在でも統一場理論 (とくに重力と強い核力の統一) はまだ完成していませんが，今後とも幾何学が重要な役割を果たすことは確かでしょう．

問．フェルマーとは何者ですか？「フェルマーの最終定理」以外に何かすごいことをしたのでしょうか？

答．何者シリーズですね.「フェルマーの最小原理」もすごいです．それ以降の物理 (力学，電磁気学，統計力学，物理数学，変分法など)，現代物理にも，たとえば「ファインマン積分」の思想にさえも影響を与えています．

問．高次元世界では，ベクトル積はどのように定義されるのですか？

答．ベクトル積は，３次元空間のベクトルについてのみ定義されます．

問．「物質波」とは何ですか？

答．量子力学に出てくるド・ブロイの物質波です．

問．前回の回答書に「この世界は無限次元空間で，無限次元の情報から，有限個の情報を取り出している」とありましたが,「無限次元の情報」とは，たとえば，どのような情報がありますか？よく,「４次元」と言われる「縦，横，高さ，時間」の他に何があるのですか？

答．古典力学の言葉で言えば，たとえば，位置の３次元の他に，運動量 (あるいは速度) の分が３次元ありますね．皆さんが，２つの質点が独立に運動していることを記述しようとすると，全部で，$(3+3)\times 2 = 12$ 次元必要です．その時間変化を記述する場合は，時間も入れて，13 次元空間で考えることになります．(相対論を考慮に入れれば，絶対時間はないから，$(3+3+1)\times 2 = 14$ 次元必要です)．質点ではなく，小さな球が回転する場合は，角運動量 (あるいは角速度) の３次元がそれぞれ必要になります．もし，その球は何色ですか？と聞かれたら，赤，青，黄色，などと答えますが，(色とは何か，ということにもよりますが)，コンピュータに色を教えるには，いくつかのパラメータが必要になります．(たとえば「明るさ」なども必要)．その球の材質は何かと聞かれたら，金属なのか，皮なのか，プラスチックなのか，その「ふうあい」を実現するには，いくつもの情報が必要になります．その球は誰のものか，その所有者の電話番号は？所有者は男か女か？とにかく情報はいくらでもあります.「次元が違う」という言葉がありますが,「違う次元が，無限にある」ということです．われわれは，その無限次元の情報のうちから，その時々に必要な情報を選んでいるわけです．

問．「この世界は無限次元空間です」とありました．CG における $3D$ ムービーやグラフィックスに，私は違和感を感じることがあるのですが，やはり，現実の世界とは違うからなのでしょうか？

答．そう思います．

問．まだ納得できないことがあるのですが，なぜ平行線は無限遠点で交わるのですか？昔，平行線とは,「どこまでいっても絶対に交わらない同じ平面上の２本の直線」と習ったような気がします．

答．交点が普通の平面上には存在せず，無限遠直線上に存在する，というだけのことです．ところで，納得できないということは良いことです．だいたい，日本人はものわかりが良すぎます．器用すぎます．イギリス人などは，本当にものわかりが悪い．頑固です．でも頑固なので，本当に良いものを見極める目があります.「本当に自分で納得するまでとことん考える精神」は，われわれが見習うべきことですね．

問．数学の分野においても，海外での研修などは必要なのでしょうか？偉大な発見をした数学家の生家は，一度は見たほうがよいのでしょうか？

答．学問，とくに自然科学に国境はありません．海外がどうの，国内がどうの，といっていては，研究はできません．教えを請いたい人がいれば，参加したい研究会があれば，会いたい人がいれば，どこにでも行く必要があるのは当然でしょう．ところで，数学家の生家を見るのはただの観光でしょう．

問．平面幾何では計算はありますか？今，大学でやっている微分，積分や線形代数学は，計算だらけで，数学らしいのですが，平面幾何は，数学というより図学に似ている気がします．それに数字が少なく，記号や英文字が多い気がします．平面幾何が数学の一部ならば，計算とかないと，数学という感じがしません．それとも僕の考え方，感じ方が間違っているのでしょうか？

答．間違っているというより,「狭い」です．数学では，もちろん計算もします．また，論理的推論もします．大学の数学は，高校の数学に比べて，論理的推論の要素が増えているはずです．高校で数学が得意だったという人が，大学の数学に違和感を覚えるということが多いのはこのためです．微積分や線形代数学では，計算できるのは当然のこととして，その上で，論理的に考えられる能力が重要視されているはずです.「計算ができる」で満足してばダメで,「その計算をする目的は何か，ということを踏まえて計算ができる」という段階に進まなければいけません．目的もなく計算することは愚かなことです．ところで，数字 $1, 2, \ldots$ も立派な記号ですよ．

問．忘れてもよいのですか？

答．どんどん忘れてください．忘れることを恐れていては，新しいことば吸収できません．たとえ話になって恐縮ですが，水を吸ったスポンジは，一度しぼらないと，新しく水は吸い込めません．黒板に新しい文字を書くには，一度黒板消しで古い文字を消しますね．身についたことは，忘れても思い出すことができます．思い出すことができなかったら，それは，皆さんにとって必要のないものです．

問．数学ができるできないかは，生まれつきのものでしょうか？

答． どんな分野でも，とくに芸術的な分野では，生まれつきの才能というか,「向き不向き」があるのは確かです．これは仕方のないことです．でも，芸術でも，いろいろなレベルでの楽しみ方があって，絵画なら，自分で独創的な絵を描く画家，趣味で自分で絵を描く人，デザインなどの絵画と関係する職業につく人，美術評論家，たまに美術館に行くのを楽しみにしている人，などなど，いろいろな場合がありますね．数学は，実用的側面の他に芸術的側面のあるので，そういう意味で，自分にあった楽しみ方，数学との係わり方を発見してほしいな，と思っています．僕 (石川) も暇があったら美術館に行きたいと思っています．ところで,「アンリ・ルソー」という画家の絵が私 (石川) は好きなのですが，知っていますか？ずっと，日曜画家だった人ですね．奇妙なエスニックな作品を多く残したひとです．ところで関係ないですが，エスニックといえば,「ゴーギャン」が有名ですが，この人をモデルにした小説「月と６ペンス」(サマセット・モーム) を大学１年のころ (高校時代かもしれません) に読んで衝撃を受けた記憶があります．読んことがありますか？

問． 現代の数学の理論を昔の人に見せたとしたら，どのような反応をすると思いますか？

答． 根本的に考え方が違う部分があるので，数学とは認めないかも知れませんね．学問が進歩するときには，世代間の断絶は仕方のないことでしょう．

問． 平面幾何はもう進歩しないのですか？平面幾何というか，数学全部はもうすでに研究し終わった感じがします．これ以上はもうほとんど進歩していかないんじゃないですか？

答． そんな情けないことを言わないでください．進歩するかどうかはこれからの皆さんの世代の活躍にかかっています．ところで，二流の人は，人のやってきたことを追い掛けるだけなので，すこし行き詰まると，もう何もやることはないと判断しがちなのです.「匙を投げる」．それに比べて，一流の人は，行き詰まりの中に，新しいアイディアや新しい視点を持ち込み，その分野を再生し力強く進んでいくものです．皆さんも，それぞれの道で，行き詰まりを感じても，逃げずに，どんどんブレイク・スルー (break through) していってください．

問． テストはするのですか？

答． テストはしません．でも敢えて言えば，質問書が，皆さんの勉強具合の毎回のテストであると言えます．ところで，この平面幾何の講義をコンピュータを利用して行ったら良いのではないでしょうか？という提案をもらいました．なるほど．考えてみます．まあ，この回答書を書くにもコンピュータを利用してはいるのですが，もっと積極的に利用するということですね．そろそろホーム・ページを立ち上げたいと思っているので，それを利用するとよいかも知れませんね．でも，私 (石川) はコンピュータを過信していないアナログ人間です．ところで，自分は微分が苦手であります，という告白がありました.「微分のことは自分でせよ」という言葉もあるので，この講義では，微分は使いません．また，CG グラフィックに影をつける時には，射影幾何的な計算がされているのでしょうか？という質問を受けました．たぶんそうでしょうね．それから，平面幾何の最先端はあるのですか？という質問がありました．平面なので，最先端はなく，無限に広がっていると言った方がよいと思います．それはともかく，なにが最先端かどうかは問題意識によると思います．それはそうと，射影平面に対して，従来の平面はなんというのですか？という質問もありました.「従来の平面」で意味が通じると思います．ところで，４次元は見えますか？という質問もありました．見えるのは２次元です．網膜の像は２次元 (平面図形) です．誰でもそうだと予想します．３次元に見えるのは，皆さんが頭の中で想像しているからですね．想像するなら，何次元でも可能です．要は想像力の問題ですね．また，ハミルトンという単位はありますか？という質問を受けました．私 (石川) は知りません．誰か教えてください．また,「パスカルの定理」は,「パスカルの三角形」と関係はありますか？「パスカルの三角形」と「パスカルの定理」のパスカルは同じ人ですか？という質問がありました．同じ人です．でも，数学の内容としては，この２つのことは関係ないようですね．ところで，ニュートンは第一論文を平面幾何のみで証明したそうです．ライプニッツとニュートンは微積分法をほぼ同時に発見し，発見者はどちらか，という争いをしていました．その論争の中，ニュートンの第一論文をあえて微積分を使わずに，平面幾何のみを用いて証明し，ライプニッツの鼻をあかしたのだそうです．という情報をもらいました．確かに，ニュートンの有名な本「プリンキピア」にもかなり平面幾何が使われていますね．また，オイラーの公式で，e を使ったすごい式があったと思ったのですが，思い出せません．という質問を受けました．それは，$e^{i\pi} = -1$ のことですか？また，色々な事でガウスという名前を聞きますが，全て一人のガウスによるものですか？それとも様々な時代の様々なガウスが考えた別のものですか？という質問がありました．一人のガウスです．また，ガウス記号では何ですか？という質問もありました．ガウス記号 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す記号です．では，$[0.9999\cdots]$ は何でしょう？それはそうと，講義と関係ないですが，なぜ時計は右まわりなのでしょうか？という質問を受けました．難しい質問ですね．文字を横書きする場合に，左から右の方へ書く，ということから来ていると推測されますね．ところで,「CUBE」という映画もほんの少しだけ数学的な要素を含んだ映画で，なかなか面白かったです．数学抜きなら「ショーシャンクの空に」が No.1 間違いなしですが，というコメントをもらいました．数学的要素というなら,「マトリックス」だと思いますが．私 (石川) は観たことはないです．それから，ジャン・レノの作品で好きなのは「レオン」です，という情報をもらいました．実は私 (石川) は，ジャン・レノというと,「広末涼子を泣かした男」という印象しかありません．それから,「すん」は「うん」と一セットだったはずです．確かウンスンカルタというカルタが語源だったと思います，という情報をもらいました．ありがとう．また，この世は本当に無限次元空間なのでしょうか？という質問をもらいました．冷静に考えれば，この世もあの世も無限次元です．関係ないですが，(仏教用語?に)「無間 (むげん) 地獄」というのがあった気がします．それから,「フロギストン説」とは,「物体が燃えると物体の中に含まれるフロギストンが飛び出し，物体はもえかすになる」というものだったと思います，と教えてもらいました．ありがとう．それはそうと，絶景といえば，神戸の 100 万ドルの夜景です．昔，イギリスのお偉いさんが来て,「きれい」と言い,「電気代はどれくらいか？」ときいたところ,「100 万ドル」と答えたそうです，という情報をもらいました．ありがとう．私 (石川) も見たことあります．神戸もよいですが，夜景といえば，函館山から見た夜景もきれいですね．それから，釧路管内標茶 (しべちゃ) 町にある「開陽台」という丘のてっぺんからまわりを見わたすと，本当に地平線がカーブを描いて見えます．牛がこまつぶのように見えます．最高感動ですよ，という情報をもらいました．ありがとう．地平線がカーブを描くのは，地球が平面ではなくて，球面 (楕円面) である証拠ですね．今度ぜひ訪れてみます．ところで,「牛」という言葉で思い出したのですが，何年か前に，とあるスーパーで聞いた宣伝文句があります：「牛肉パック詰め特売，ギューとつまってウッシッシ．モーカウカウ」．思わず感動して，もう買う買う．ところで，電ボの歌うエンディングテーマ大好きです．先生はどうですか，という質問を受けました．ハワイアンでまったりしていて良いですね．それはともかく,「はに丸」とか「伝書ボタル」とか，自分の知らない内容で盛り上がっていると哀しいものがありますね，という指摘も受けました．ごめんね．最近暑いです．夏を涼しくのりきる方法についても教えてください，という要望がありました．夏は暑いものです．暑くない夏はつまりません．夏は「熱く」のりきりましょう．苦労の数だけ幸せになれる．この道の他に行く道なし．行けばわかるさ，やればできるさ．ではまた．