数理とはなんだろうか？

石川 剛郎 (いしかわ・ごうお)
北海道大学・理学研究科
数学専攻・空間構造学講座

— 数理のイメージ —

concrete	abstract
easy	difficult
complicated	simple
sophisticated	primitive
real	virtual
artificial	natural
hot	cool
wet	dry
usual	celebrated
familiar	noble
intuitive	logical
pragmatic	platonic
technical	artistic
human	god

数理科学とは「数理モデル」に関する科学である．

(プラモデル，ファンションモデル,…)
数理モデル (Mathematical Model).

札幌市厚別区に住む I さんは新聞記事に，
”北海道の平均 1 世帯人数が，1975 年 (昭和 50 年) は 3.30 人であったが，2003 年 (平成 15 年) では 2.27 人となり，核家族化が進んでいる” とあるのを読んで，
「世帯人数が 2.27 人ということは現実にあり得ないじゃないか．0.27 人とはどんな人だ．こんな統計に意味はないな」
とつぶやいた．

確かに，2.27 人ということは現実にはあり得ない．にもかかわらず，このデータは確かな意味を持ち，有用な情報である．

割り算，分数 $\dfrac{b}{a}$.

教訓：
「数理モデル」は”現実”そのものではない．
現実離れすることにより，現実をよりよく知ることができる．(⟶ 抽象化).

相加平均 (算術平均)	$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$
相乗平均 (幾何平均)	$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$
調和平均	$\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$

「数理モデル」は，「数学」に基づいて作られる．

「数理モデル」は，現実を記述するための理論．
「数学」は，数理モデルを生み出す，現実とは独立な体系．

現実からの「独立宣言」
独立するが，交流する．
鎖国はしない．(鎖国しても出島で貿易)

蛇足：”Mathematics” は「数学」か？「数理学」か？

現実	$\longleftrightarrow$	数理モデル	$\longleftrightarrow$	数学
鯛		たい焼き		たい焼きの鋳型
観察		法則		理論・公理
制御		予測		演繹・定理
技術		応用		基礎・抽象

数理物理学　　　　　数学
数理化学
数理生物学
数理経済学　　　　　数理学
.....

例 : 数理物理学 = 物理学のためのいろいろな数理モデルを作り応用する，または，そのための数学の研究をする学問.

② 数学の考え方.

数学の基本
微積分と線形代数.

【 微積分と線形代数からのこぼれ話 】

数学の本質にかかわる
「頭の整理体操」

● 実数は実在するか？
(「数直線」ってどこにある？)

● 右と左は数学的に区別できるか？
(時計回りって，どっち向き？)

● 真と偽は数学的に区別できるか？
(天の邪鬼の数学ってあるの？)

● 実数は実在するか？

すべての実数からなる集合 $\mathbf{R}$.

● 円周率の話.

札幌市厚別区の I さんは,「円周の長さは，実際にヒモではかって求めればいいじゃないか．円周率なんて教える必要ない」と言っている.

円周の長さ ($\longrightarrow$ 曲線の長さ) とは何？

「円」は現実には存在しない.「長さ」も抽象的な概念. ($\longrightarrow$ 極限)

(円満な性格，円熟した境地，丸い月 — 現実にはありえない).

$\varepsilon - \delta$ 論法. $\varepsilon - n$ 論法.

問. ε-δ 論法の意味と意義がわかりません.

答. 「極限」の意味の "限りを極める" ときに ε-δ 論法が必要になります．数列の極限で説明すると，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ということはどういうことか．それは，番号 n を増やしていくと，a_n が α にどんどん近づいていく，と説明できますが，では，仮に宇宙人が家に遊びに来て,「どんどん近づく」とはどういうことですか？と聞いてきたら，どうするか，n を大きくすれば，a_n と α の差が，１００万分の１より小さくなる，もっと n を大きくすると，１億分の１より小さくなる，ということだよ，と答えたら，じゃあ，１兆分の１ではだめなの？と聞かれた時，そうじゃなくて，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，n を大きくすればいいのさ，つまり，$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbf{N}, m \geq n \Rightarrow |a_m - \alpha| < \varepsilon$ と答えれば，ようやくわかってくれるのです.

$\mathbf{R}$ は非常の精密な数理モデル.
微積分という数学の (たぶん一番) 重要な構成要素.

結論：実数は実在しないが，なくてはならない存在である.
同じ意味で，複素数 (虚数) も実在しないが，なくてはならない存在である.

● 右と左の話.

◇「右手系」「左手系」と言うが，右，左は数学的に特定できるか？

◇「時計回り」と「反時計回り」は数学的に特定できるか？

数学では，どちらがどちらかを特定しようとはしない．区別するが差別しない！

蛇足：右と左を，
数理科学では特定しようとしない.
物理科学では特定しようとする.
生物科学では特定しようとする.

$\mathbf{R}^3$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(「標準基底」) は特定できる.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

の決める向きとは違う.

3 次元空間を $\mathbf{R}^3$ と同一視できる.
しかし，標準的な同一視の仕方はない. (仕方ない).

向きを一斉に入れ替えても，数学の定理は不変.
“鏡の中” の数学は同じ.

● 行列の定義.

行列 (マトリックス，matrix) とは，
数を「縦，横」に並べたもの.

縦とか横とか言っても，数学的に特定できない．したがって，行列のこのような「定義」は，“教育的” ではあるが，数学的でない.

たとえば，$m \times n$ 型実行列の数学的な定義は，

写像

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbf{R}.$$

$$A((i, j)) = a_{ij}.$$

問. $x^2 = -1$ の解は 2 つありますが，どちらを i と名付けるのですか？

答. どちらでも良いです.

● 「真」と「偽」は数学的に特定できるか？

「数理モデル」や「数学」は，**集合**と**写像**の言葉で**論理的に**記述される.

数学は論理的に破綻していてはいけない．非論理的な説明でよいのなら，どんなことでも．どのようにでも説明できてしまう !!

その上で，

数学では，真と偽を特定しようとする．

蛇足：数学の理論とかけて「鞄 (かばん)」ととく．そのこころは，“ほころび” があると困ります．大きな鞄，小さな鞄を用途に応じて使い分けます．素材やデザインも気になります．ブランド物が好きな人もいます．

● 論理について．

$\forall x, P(x)$, の形の命題
例：$\forall x,$ (x が実数 $\Rightarrow x^2 \geq 0$).

$\forall x(Q(x)), \exists y, R(x,y)$ の形の命題
例：
$\forall x,$ (x は正の実数)，$\exists y, 0 < y < x$.
$\forall \varepsilon, (\varepsilon > 0), \exists n, n$ は自然数 かつ (m が自然数 かつ $m \geq n$) $\Rightarrow |a_m - \alpha| < \varepsilon$)

命題 ($P \Rightarrow Q$) の真偽

P が偽ならば，Q の真偽にかかわらず，命題 ($P \Rightarrow Q$) は真．
命題 「$P \Rightarrow Q$」 と命題 「(Not P) or Q」は真偽を共にする．(同値な命題，等価な命題)．

蛇足：論理命題とかけて,「たまねぎ」ととく．そのこころは，$\forall$ や $\exists$ の皮をむいたあとに真 (芯) が残ることもあります．偽 (たまねぎの”ぎ”) になることもあります．

● 背理法：

ある命題が真であることを，その命題の否定命題を仮定して矛盾を導くことにより証明する方法．
”背理法モード”．

真であることを証明したい命題 P.
真であることがわかっている命題 Q.
このとき，(Not P) $\Rightarrow$ (Not Q) が真であることを証明する．

(Not P) から，すでに知られている命題 Q と矛盾する命題 (Not Q) を導く．
すると，
(P or (Not Q)) が真であることがわかり，(Not Q) は偽なので，P が真であることが示される．

蛇足：論理学では真偽を区別するが特定しようとしない．
数学では特定しようとする．
倫理学では善と悪を特定しようとする．
(真偽とは，信疑や信義のことではない)．

---

③ 数理の未来．

●ものごとをはっきりさせようと思うと，どうしても数理になる．

数学の特長，その１

芸術性
美しい．
永久性
永遠に正しい．
自由性
何ごとにもとらわれない．

「研究成果がどう使われるかをみんなが考えることは大事だが，それが学問の自由の放棄につながってはならない」(２００３年１月４日の朝日新聞より)

プラトニック・ワールド (ペンローズの主張)

数学の特長，その２

普遍性
どんな場面にも現れる．
抽象性
本質だけを取り出す．
汎用性
いろいろなことに応用できる．

●「ユーザー」と「メーカー」

高校までの数学 = ユーザーの立場の数学．
大学での数学 = メーカーの立場の数学．

「数学の消費者」対「数学の生産者」

数理科学が社会全般で使われている現代では消費者と生産者の両方の考え方を知っている人材が求められている.

財界が「大学で養うべきもの」として挙げていること：論理的な思考力，創造力，問題解決能力，問題発見能力.

蛇足：もし「何の役に立つのか？」と尋ねられたら，「役」とは もともと "戦争にかり出す人やその代わりに差し出す金"(新明解国語辞典) という意味があるので，それは，"戦争に利用できるか" ということですか？とまぜ返そう.

● 数理学の今後の課題の実例

◎ ２００３年生まれの鉄腕アトムは，
５２年前に手塚治虫さんが生み出した.
これから５２年後の２０５５年の社会
を構想せよ.

◎ 人ゲノム等の膨大な情報から人間を理解する方法で，従来の統計の方法とは異なる数理モデルを確立せよ.

◎ 場の量子論を記述する数学を創れ. (たとえば，経路積分の方法は，まだ数学的には破綻していると言われている).

◎ リーマン仮説を証明する数学を構築せよ.

◎ 特異点の新しい数理モデルあるいは数学を創り，応用せよ.

● コースティックスの話

特異点とは： 重箱の隅，豆腐の角.

☆ 周囲と比べてきわ立って異なっている点

☆ ある理論が破綻するような状態 (に対応するパラメータの値)

関連する用語：臨界点，分岐点，停留点.

「特異点」は従来の数学に横断的に現れる.

関数論・微分方程式論 では...

◇ 関数が定義できない点,

◇ 関数が連続にならない点,

◇ 関数が微分可能でない点 etc.

幾何の分野 では...

△ 図形が尖っている点

△ 図形が滑らかでない点

△ 図形を定める方程式に関して**陰関数定理**や**逆関数定理**が成り立たないような点 etc.

力学系の研究 では...

▽ ベクトル場が零になる点

▽ 流れのわき出し点，吸い込み点 etc.

● 贈る言葉

「自然の書物は数学の言語によって書かれている」(ガリレオ)

「強みを忘れたらチャンスをなくす」(カルロス・ゴーン)

「世界に一つだけの花」 (槇原敬之)

「やり甲斐のあるテーマを見つけ，探究する場である大学を有利な就職の道具としか考えないやつを，オロカ者という」(秋山 仁「オロカ者の定義」)

「専門バカでないものは，ただのバカである」
(小平 邦彦)

「大切なことは，問うのを止めないことである」
(アインシュタイン)

「あわてるな，数理は急に分からない．数学は徐々に，学ぶものなり」(石川剛郎)