ラグランジュ・ルジャンドル特異点をめぐって
— ２０００年のカタストロフ理論 —

石川 剛郎
(いしかわ ごうお，Goo Ishikawa, Go-o Ishikawa)
Department of Mathematics, Hokkaido University,
Sapporo 060-0810, JAPAN.
E-mail: ishikawa@math.sci.hokudai.ac.jp

【１．カタストロフ理論】 ルネ・トムが「カタストロフ理論」を提唱してから３０年あまりの月日が経った．若い方の中には，カタストロフ理論という名前を聞いたことがない人もおられると予想する．この講演を準備するにあたり，トムの代表的著書「構造安定性と形態形成」[25] をもう一度読み返してみた．いまなお刺激的でおもしろい本である．

カタストロフ理論とは何か．一言で説明するのはもちろん難しいが，あえて言うと,「対象の状態空間における分岐集合の特異性を調べることにより，局所的形態形成を研究する方法・視点」である．したがって，カタストロフ理論は局所理論であり，形に関する理論であり，その最も基本になる概念・対象は「分岐集合」である．分岐集合は「カタストロフ集合」ともよばれる．どんな状況でも，分岐集合は何か，と問うてみること，それがカタストロフ理論の精神の具現であろう．[1]

[1]例．たとえば，多項式関数 $y = f(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ を決める状態空間は係数 $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ の全体 $\mathbf{R}^5$ である．$y = f(x)$ の勾配 $f'(x)$ に注目して分岐集合を調べると，それは $\mathbf{R}^5$ 内の超曲面であることがわかる．その超曲面にはどのような特異点があるか，特異点のまわりで，勾配の「ありよう」がどのように変わるか，と問うことは，微分という概念が生まれた瞬間 (あるいはそれ以前) からあった問題意識であろう．しかし，肝心の「どのような」「どのように」ということを認識し，それをおおやけに説明することは，たやすいことではない．たとえば,「形」に関して，明らかに現在でも (現在の方が？) われわれはボキャブラリー不足である．アーノルドの言葉では,「A_4」 という名前がついているが...

実代数幾何，たとえばヒルベルト第１６問題の研究 (実平面代数曲線の位相幾何) もカタストロフ理論と関わっている．実代数的平面曲線の空間のなかで，分岐集合 (この場合，判別集合とよぶ) は特異曲線の全体からなる超曲面である．補集合の連結成分で

さて，トムによれば，カタストロフ理論は，基本 (初等) カタストロフ理論と，一般カタストロフ理論に大きく分けられる．[2] この分類はトムの言葉で言う「静的モデル」と「代謝モデル」の違いに対応する．[3]

カタストロフ理論の基礎は，写像の特異点論[4] であり，力学系の分岐理論である [3]. 基本カタストロフ理論は，極言すれば関数族の特異点論の応用[5] であり，関数の臨界点の分岐に基づくモデルを構築しようとする．その際，写像の特異点論の基本概念であって，基本カタストロフ理論の基礎概念となるものは，**構造安定性**と**開折のヴァーサリティー**[6] である．

は，曲線の形態が一定である．したがって，位相形の総計は，補集合の連結成分の個数 (π_0) で評価できる．このことは，複素代数幾何で，超曲面の補集合の基本群 (π_1) の研究が重要であることに対応する事項である．実際にトムは，カタストロフ理論にとっての実代数幾何の発展の必要性を述べている [25].

また，ヴァシリェフ不変量 (結び目や平面曲線の局所不変量) は，分岐集合の解析から生まれたと言ってよい．カタストロフ理論がなかったら，いまだ見つかっていなかったかもしれない．

[2] あるいは，カタストロフ理論を，より大きく，ハード・カタストロフ理論とソフト・カタストロフ理論に分けることができるかもしれない．ハードはカタストロフ理論の基礎を扱い，ソフトは応用に注目する．上の分類は，ハード・カタストロフ理論の分類にあたる．

[3] この分類は凝り固まったものではない．つまり，基本カタストロフから一般カタストロフへどのように移行するか，という魅力的なテーマの研究も活発になされているからである．あるいは，それとは別に，カタストロフ理論を，トムのカタストロフ理論 (主に生物学，言語学への思弁的応用,「これがわかる」)[25][26]，ジーマンのカタストロフ理論 (広く社会科学等への思弁的応用,「これもわかる」)[29]，アーノルドのカタストロフ理論 (あくまで厳密な応用に限る,「これはわかる」)[3] に分けることもできるかもしれない．ただし，この場合も,「思弁的」「厳密」という区切りは "厳密には"できない．数学は常にモデルを通して現実に応用されることを思い出す．その意味で，説明というものはすべて思弁的である．問題はその説明の基礎の部分が充実しているか否か，ということだろう．また，その際，見落としがちだが，トムの強調する「直感的素材の拡張」の重要性にも注目すべきかもしれない．[25] にあるように,「幾何学は成功した魔術である.」「魔術は成功する限りは，すべて幾何学ではなかろうか？」

[4] 関連する情報が多くある JSN(Japanese Singularity Network) のウェブ・サイト (http://indy.math.sci.hokudai.ac.jp/jsn/) を訪れてみてください．これは北大の泉屋周一氏の指導のもと，佐野貴志氏 (この４月から北海学園大) により運営されています.

[5] かつて一時期，関数族の特異点論は簡単だから，それを応用したカタストロフ理論もたいしたものではない，という批判があった．しかし，その批判は２つの点でずれていると思う．まず，理論は簡単であるべきである，簡単な理論を作ることこそがわれわれの目的である，ということは確かである．また，その応用が重要かどうかは，応用のさせ方，視点の独創性に関係する．要は「何をいかに理解するか」ということの方が大切なのだろう．微積分と線形代数を駆使するだけでも，世の中のかなりのことが理解できることを，われわれはよく知っている．

[6]「開折」は unfolding の訳である．folding の逆だから，折られているものの「開き」，ホッケの開きのように，退化した特異点の**見えない部分を白日のもとにさらす**，という意味であろう．また，その開折自体が同じ種類の対象ととらえられる場合に使用するとのことである．ちなみに，開折に数学的に似た概念に「変形」(deformation) があるが，もともとの対象を，複雑なものと考え，それをわかりやすいものにするという

今回のお話[7] は，そのうちの基本カタストロフ理論のある種の拡張，言うならば，**基本カタストロフ理論のシンプレクティック化および接触化**[8] についてである．どちらかというとアーノルドの意味のカタストロフ理論の範疇に入るが，しかし，現在あるアーノルド理論の一般化をめざしていて，また同時に，写像の特異点論のシンプレクティック化・接触化も視野に入れている．この一般化が今後どのように応用されるか，そこがもちろん肝心なところだが，それは未知数である．しかし，数学としても十分おもしろいのではと私 (石川) は思っている．[9]

【２．ラグランジュ特異点とルジャンドル特異点】シンプレクティック多様体[10] の中のラグランジュ部分多様体[11] のラグランジュ・ファイブレー

のが，開折の発想であり，もともとの対象をきれいなものと考え，それが歪んで形を変えるというのが，変型の発想であろう．したがって,「難 → 易」あるいは「陰 → 陽」が開折で,「整 → 実」あるいは「聖 → 俗」が変形という用語を使う場合の思い入れであると言うと言い過ぎであろうか．言い過ぎであろう．また，開折が「バーサル」(versal) であるとは，他のいろいろな開き方のすべての情報を含んだ開折であるという意味である．たとえると，ホッケの開き方のすべて，というビデオがあればそれはバーサルである．もちろんビデオのように１次元的なメディアではなく，より高次元のメディア (身近に良いたとえがないけれど) が必要なこともあろう．ともかく，バーサル開折がわかれば，それを調べることによって，その特異点のことが真に理解される．ちなみに，バーサルは transversal から生じたことばである．実際，versality は transversality と結び付けられることが多い．transversal に交われば，**少しの摂動では，はずれない**，安定である，ということが，ある程度納得していただけると思う．

[7]本稿で述べた研究は，科学研究費基盤 B(2) 「射影接触幾何と特異点論」にも基づいています．

[8]それらの拡張は，しかし，カタストロフ理論の生まれた時からすでにあった，とも言える．実際，トムの著書 [25] の重要な部分に，ハミルトン力学や，波面の理論が深く関わっている．

[9]今回の話は，私 (石川) が大学院生時代からかれこれ２０年近くずっと研究しているテーマの１つの現状報告です．遅々として進展しない研究をこうして続けていけるのも，故足立正久先生，福田拓生先生，泉屋周一先生，ウラジミール・ザカリューキン先生，スタンチェック・ヤネチコ先生，チャールズ・テレンス・ウォール先生はじめ，挙げきれませんが，多くの皆様からの暖かい励ましと貴重なコメントのおかげです．

なお，一般カタストロフ理論についても多くの発展があるが，それについての解説については他に適当な方が多くおられると思う．一般カタストロフに関して解説する能力は (も？) 私 (石川) にはない．

[10]$\mathbf{R}^n$ の位置 x と運動量 p の空間 $T^*\mathbf{R}^n$ (相空間，余接束) には，自然な２形式 $\sum_i dp_i \wedge dx_i$ があり，シンプレクティック形式と呼ばれる．このような非退化な閉２形式の指定された多様体のことを指す．次元は必ず偶数である．解析力学や量子力学の大切な舞台である [21].

[11]最大次元のアイソトロピック (つまりシンプレクティック形式が消えている) 部分多様体のこと．シンプレクティック多様体の次元が $2n$ の場合，ラグランジュ部分多様体の次元は n に等しい．たとえば閉 1 形式のグラフ，とくにポテンシャル関数の勾配のグラフや部分多様体の余法バンドル，そのシンプレクティック微分同相による像などの例がある．変分問題において，オイラー・ラグランジュ方程式と関わり，ラグランジュ部分多様体は，しばしば (つねに？) 登場する対象である．

ション[12] に関する特異点[13] を**ラグランジュ特異点**とよぶ．特異値の集合を**コースティック**[14] とよぶ．

関数族に対して，パラメーター空間上の余接束のラグランジュ部分多様体が構成される．[15] 逆にすべてのラグランジュ部分多様体は局所的に，ある関数族から構成され，その関数族の分岐集合とラグランジュ部分多様体のコースティックは一致する．

また，接触多様体[16] の中のルジャンドル部分多様体[17] のルジャンドル・ファイブレーション[18] に関する特異点を**ルジャンドル特異点**とよぶ．射影の像を**波面**[19] とよぶ．

ある空間 (内部空間) の超曲面族に対して，パラメーター空間上の接触要素の空間に，ルジャンドル部分多様体が構成される．[20] 逆にすべての

---

[12]各ファイバーがラグランジュ部分多様体であるようなファイブレーションのこと．典型的な例は，$T^*\mathbf{R}^n$ から底空間 $\mathbf{R}^n$ への射影である．この射影は，変数 x と p を区別しなければならないとき考える．

[13]この場合，そのラグランジュ部分多様体の接ベクトルで，ファイバーに接するものがあるような点のこと．射影の特異点である．

[14]焦線，火線，焦面などとも呼ばれる [17]．幾何光学で，光が集まり，その部分が焦げて，燃え出すという意味あいである．[9] では，焦点集合と訳されている．また，ある関数族の「分岐集合」と一致する．

[15]関数族のそれぞれの関数の変数を，パラメーター (**外部変数**) と区別して**内部変数**とよぶことにすると，関数族の各パラメーターについて，その瞬間の関数の臨界点での値の，内部変数に関する変化量は 0 であるが，パラメーター方向に関する変化量を考える．パラメーターと臨界点を動かしたときの軌跡．一般にパラメーターについて多価性を持つ．

[16]$\mathbf{R}^{n+1}$ の接触要素 (接空間の余次元 1 の部分空間) の全体 $PT^*\mathbf{R}^{n+1}$ の作る空間は，その接触要素の $PT^*\mathbf{R}^{n+1}$ での無限小変形が，$\mathbf{R}^{n+1}$ ではその接触要素の方向である，という条件できまる完全非積分な余次元 1 の分布をもつ．アファイン座標 x, z, p について，$dz - \sum_i p_i dx_i = 0$ で決まるものである．このように，完全非積分な余次元 1 の分布 (接触構造) の指定された多様体を接触多様体とよぶ．次元は必ず奇数次元である．

[17]接触構造の積分多様体で最大次元のもの．関数の 1-ジェットのグラフ，部分多様体に接する接触要素全体，それらを接触微分同相で動かしたものはそうである．接触多様体の次元が $2n+1$ の場合，ルジャンドル部分多様体の次元は n である．

[18]接触多様体のファイブレーションで，各ファイバーがルジャンドル部分多様体であるもの．典型的な例は，$PT^*\mathbf{R}^{n+1}$ から $\mathbf{R}^{n+1}$ への自然な射影 $(x, z, p) \mapsto (x, z)$ である．

[19]たとえば，$\mathbf{R}^3$ の曲面から波が発せられると，その波面は，ホイヘンスの原理にしたがえば，波源からの距離一定の円族の包絡面として得られる．それは，初期面の接触要素のなすルジャンドル部分多様体を，ある接触微分同相の流れで流したものの射影と考えられる．また，いろいろな対象はある種の波面であると見なされる．すべての滑らかな超曲面は，自然なルジャンドル持ち上げをもち，波面と考えられる．また，たとえば，空間曲線の接線の織り成す曲面，すなわち，接線可展面 [14] もそうである．

[20]内部空間の超曲面の族があると，各パラメーターと，そのときの超曲面の各特異点における大超曲面 (その超曲面族が内部空間とパラメーター空間の直積のなかで形作る，次元の高い超曲面) の接平面が定める大接触要素のきめる，パラメーター空間の接触要

ルジャンドル部分多様体は局所的に超曲面族から構成され，その判別集合[21] とルジャンドル部分多様体の波面は一致する．

ラグランジュ・ルジャンドル特異点論は，幾何光学や部分多様体論[22]，偏微分方程式論[23]，量子カタストロフ理論 (？) [24] など多くの分野に応用される ([17], [4]).

ラグランジュ特異点論とルジャンドル特異点論は，異なる数学の構造と応用範囲を持つ理論だが，密接に関係する．[25]

以下，簡単のため，ラグランジュ特異点に関する最近の結果をのべる．[26]

【３．特異ラグランジュ多様体の単純安定射影】 ラグランジュ部分多様体のラグランジュ射影の特異点の分類は，関数の特異点の分類に帰着される [1][5]. そのうち，いわゆる単純特異点は，A, D, E 型ワイル群に対応する．[27] その分類を一般化し，ラグランジュ部分多様体が考え得る最も簡単な特異点を持つ場合，すなわち，1 型の**ホイットニーの笠**[28] の，ラグランジュ射影に関する単純

素，それらの全体をとることにより，ルジャンドル部分多様体 (やはり一般に多価性を持つ) が得られる．

[21]特異点を持つような超曲面のパラメーターの全体のこと．

[22]リーマン幾何やサブリーマン幾何の指数写像の特異点，の研究 (たとえば [17] を見よ) やカット・ローカスの研究はおもしろい．特異点論的にも興味深い．

[23]トム [25] はカタストロフ理論の堅実な応用の例として，ショック・ウェーブ (衝撃波) の研究をあげて，[7] を引用している．ルジャンドル特異点論 (ルジャンドル開折) を応用したショック・ウェーブの研究が現在活発になされている [17][16]．ちなみに [7] の巻末の言葉を引用しておく：A great effort will be necessary to develop the theories presented in this book to a stage where they satisfy both the needs of applications and the basic requirement of natural philosophy.

[24][2] にこの言葉が見られる．振動積分の漸近展開などを意識している．また，シンプレクティック位相幾何などとの関係も興味深い [9].

[25]ある意味で,「ルジャンドル特異点論は曲面論」であり,「ラグランジュ特異点論は曲面の射影の理論」である．

[26]ルジャンドル特異点についても同様の結果が成立するが省略する．

[27]しかし，**なぜ**その対応が存在するかという点については，(わかっているつもりになっているかもしれないが) 本当はよくわかっていない．単純特異点の分類が，たまたま有理２重点の分類や SU(2) の有限部分群による商特異点の分類と一致することから，特異点解消や表現論的な説明などが沢山なされているが，直接，特異点の単純性と関わるような説明はまだないと思う．つまり，特異点が単純ということと，有限鏡映群 (コクセター群) の分類が関係するという “からくり” は，ともに有限性が関わっているとは言え，まだ完全には解明されていないと考える．そのような単純特異点に関する理解を深めるためには，単純特異点を一般化して，その対応 (ADE 対応) がどのように拡張されるか，その際どういう対応物が出現するか，というようなことを観察するのが１つの良い試みとなるであろう．

[28]「ホイットニーの笠」は，ホイットニーの開いた傘, open Whitney umbrella, unfurled Whitney umbrella, OWU とも呼ばれる．$2n$ 次元シンプレクティック多様体の場合,

特異点の分類結果 [6] を紹介する．[29]

さて，$\mathbf{K}=\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ とし，通常のシンプレクティック空間 $\mathbf{K}^{2n}=\{(p,x)\}$ 上のシンプレクティック形式 $\omega=\sum_{i=1}^{n}p_i\wedge x_i$ を考る．今回われわれが扱う特異ラグランジュ多様体は，$(\mathbf{K}^{2n},\omega)$ 内の，パラメトリゼーション $(t,x_2,\ldots,x_n)\mapsto(p_1,p_2,\ldots,p_n,x_1,x_2,\ldots,x_n)$,

$$p_1=x_2t,p_2=\frac{1}{3}t^3,p_3=0,\ldots,p_n=0,x_1=\frac{1}{2}t^2,$$

による像である．これを 1 型ホイットニーの笠 (open Whitney umbrella of type 1) [30] と呼び，Λ_1 と書く．Λ_1 は，$\mathbf{K}^{2n}$ の n 次元代数的[31]ラグランジュ・ヴァライティー[32]であり，特異点集合 $\Sigma(\Lambda_1)=\{p=0,x_1=0,x_2=0\}$ はこの場合，非特異であり，$n-2$ 次元部分多様体である．

Λ_1 をいろいろなラグランジュ射影 $\pi:\mathbf{K}^{2n}\to\mathbf{K}^n$ を用いて射影して，どのような特異点が生じるか，という分類問題を考える．[33] 分類問題における同値関係としては，Λ_1-**同値** (あるいは **ラグランジュ同値**) を考える．[34]

この同値関係 (Λ_1-同値) に関する分類問題を考察する際に重要な概念が 2 つある：**安定**ということと，**単純**ということである：

$0\le k\le n/2$ である整数 k について k 型のホイットニーの笠が存在する．0 型が (はめこまれた) 部分多様体に該当する．通常の Whitney umbrella は「ホイットニーの傘」と訳される．その傘が開いている状態なので，(西洋ではあまり馴染みがないが，東洋では普及している)「笠」と訳すのが適当と考えた．一方，ホイットニーの傘の別名は cross cap で「交叉帽子」と訳される．したがって，open Whitney umbrella は non-cross cap (?) であり,「立体交叉帽子」とも訳すことができる．

[29]単純特異点の ADE 分類を，モダリティーのある場合に一般化することはすでに実行されている [2]．また境界付き単純特異点や，写像・ヴァライティーの単純 (離散代数型) 特異点の分類も知られている．ここでは別の方向への一般化を考える．ラグランジュ部分多様体の射影の分類という，もともとの問題に戻って出発し直し，射影されるラグランジュ部分多様体が，それ自体に特異点を持つ場合に，自然に単純性の定義をあてはめて，その場合の単純特異点の分類を行う．

[30]ホイットニーの笠はいろいろな場面で登場する [10][12][14][17].

[31]$\mathbf{K}=\mathbf{R}$ の場合，Λ が準代数的 (semi-algebraic) であることは自明であるが，代数的であることは自明ではない．しかしながら実際に代数的であることが証明できる．

[32]ラグランジュ・ヴァライティーの 1 つの定義は，ある多様体分割 (stratification) について，各多様体 (stratum) 上でシンプレクティック形式が消えていることである．

[33]等価原理：ラグランジュ・ファイブレーションを固定し，ラグランジュ部分多様体を動かしても，ラグランジュ部分多様体を固定し，ラグランジュ・ファイブレーションを動かしても，ラグランジュ特異点の分類問題は等価である．そして，後者の分類方法を特異ラグランジュ部分多様体に適応するわけである．

[34]$z_0,z_0'\in\Lambda_1$ の近傍でのラグランジュ射影 $\pi:(\mathbf{K}^{2n},z_0)\to\mathbf{K}^n,\pi':(\mathbf{K}^{2n},z_0')\to\mathbf{K}^n$ が Λ_1-**同値**，あるいは，Λ_1 **に関してラグランジュ同値**であるとは，シンプレクティック微分同相芽 $\tau:(\mathbf{K}^{2n},z_0)\to(\mathbf{K}^{2n},z_0')$ であって，Λ_1 を Λ_1 に移し，π のファイバーを π' のファイバーに移す $\tau(\Lambda_1)=\Lambda_1$ であるものがあるときに言う．すなわち，両者がシンプレクティック幾何的に区別できないときに同値であるというわけである．ここで，芽 (germ) とは，ある点の開近傍で定義された対象を，より小さい開近傍で一致したものは同値，と考えた同値類のことである．芽という概念は，物事を局所的に考察するときに便利である．

ホイットニーの笠 $\Lambda_1 \subset \mathbf{K}^{2n}$ に注目したとき，射影 $\pi : (\mathbf{K}^{2n}, z_0) \to \mathbf{K}^n$ が**安定射影**であるとは，射影を少し摂動しても，もとの芽と Λ_1-同値な芽が z_0 の近くに消えずに生き残っているということである．[35]

また，安定射影 $\pi : (\mathbf{K}^{2n}, z_0) \to \mathbf{K}^n$ が**単純射影**であるとは，その或る代表 $\pi : U \to \mathbf{K}^n$ があって，[36] $U \cap \Lambda_1$ の点 z を動かして，ラグランジュ射影芽 $\pi : (\mathbf{K}^{2n}, z) \to \mathbf{K}^n$ の集合を考えたとき，その同値類が有限集合であることを言う．[37]

ラグランジュ射影を指定するには，その母関数族[38] を指定すればよい．分類結果は，母関数族によって記述される．具体的な分類結果は次の通りである．

---

[35](By any sufficiently small perturbation, its equivalence class does not vanish.) より正確に述べると，射影 $\pi : (\mathbf{K}^{2n}, z_0) \to \mathbf{K}^n$ が安定であるとは，その代表 (芽は１つの同値類なので，その同値類に属する１つの要素という意味である) $\pi : U \to \mathbf{K}^n$ (U は z_0 の開近傍である) を勝手にとってきた時，U から $\mathbf{K}^n$ へのラグランジュ射影全体の空間における π の開近傍 Ω があって，任意の $\pi' \in \Omega$ に対して，U の点 z_0' が存在して，芽 $\pi' : (\mathbf{K}^{2n}, z_0') \to \mathbf{K}^n$ が，もとの芽 $\pi : (\mathbf{K}^{2n}, z_0) \to \mathbf{K}^n$ と Λ_1-同値である，ということである．

安定であるということは，それ自体が自身の (ラグランジュ同値に関する) バーサル開折であるということと等価である．

[36]この場合は，U を十分小さくとればよい．

[37]言い換えると，もとの射影の近くには有限種の射影しか存在せす，したがって，いわゆるモジュライは現れない，ということである．

安定でない対象について，それが単純であるとは，そのバーサル開折に現れる芽の同値類が有限である，と定義されるが，今回は安定なものだけを考える．安定ならば，その近くの特異性は，すべて表 (おもて) に見えているので，本文のような定義になるわけである．ある人を「単純な人物」と判断するためには，その人としばらくつきあう必要がある．つまり開折してみなければわからないが，安定であれば一目見ただけで「あいつは単純」とわかる．開かなくてもホッケの表面に「単純」「単純でない」とマジックで書いてあるようなものである．ちなみに，ここでいう単純特異点の「単純」と，単純リー環の「単純」は同じ simple だが，意味あいが異なる．それぞれ，0-modal と indecomposable と言い換えられる．

[38]$\mathbf{K}^{2n} = \{(p, x)\}$ 内のラグランジュ部分多様体は，各点の開近傍において，添字集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ のある分解 $I, J, I \cup J = \{1, 2, \ldots, n\}, I \cap J = \emptyset$ と，ある関数 $w = w(p_I, x_J)$ (母関数) に関して，$x_I = w_{p_I}(p_I, x_J), \quad p_J = -w_{x_J}(p_I, x_J),$ と表される．(そのラグランジュ部分多様体が (p_I, x_J) 方向への射影で特異点を持たないような I, J を選び，そこにポアンカレの補題を使えばよい．) 写像 $\pi : \mathbf{K}^{2n} \to \mathbf{K}^n$ は，各 $y \in \mathbf{K}^n$ について，ファイバー $\pi^{-1}(y)$ を決めれば決まるので，ラグランジュ射影は，(局所的な) ラグランジュ葉層を指定すればよい，結局ラグランジュ射影は，母関数の族で決まる．(この際，分解 I, J は共通にとることができる．) すなわち，y をパラメーターとみなした関数族 $W = W(p_I, x_J, y)$ $(y \in \mathbf{K}^n)$ に対して，$(p, x) \in \pi^{-1}(y) \Longleftrightarrow x_I = W_{p_I}(p_I, x_J, y),\ p_J = -W_{x_J}(p_I, x_J, y),$ ということで，$\pi : \mathbf{K}^{2n} \to \mathbf{K}^n$ が構成される．その際，π がサブマーションであるという条件 $\det\left(W_{p_I y}(p_I, x_J, y), W_{x_J y}(p_I, x_J, y)\right) \neq 0,$ が要請される．この条件は，$(p_I, x_J, y) \mapsto (p_I, -W_{x_J}, W_{p_I}, x_J)$ が，局所微分同相になる条件である．与えられたラグランジュ射影に対して，このような条件をみたす関数族を見つけることができる．これをラグランジュ射影の**母関数族** (generating family) と呼ぶ．たとえば，射影 $(p, x) \mapsto x$ の母関数族は，$W = \sum_{i=1}^n p_i y_i$ $(J = \emptyset)$ であり射影 $(p, x) \mapsto p$ の母関数族は $W = -\sum_{j=1}^n x_j y_i$ $(I = \emptyset)$ で与えられる．

定理１（１型[39] ホイットニーの笠の単純安定射影の分類 [6]）１型ホイットニーの笠の単純安定射影芽は，次の表[40] の母関数族[41] で表されるラグランジュ射影の１つに Λ_1-同値である．

正則点の単純射影の分類

$A_m^\pm$) $W(x_1,p_2,\ldots,p_n,y) = \pm x_1^{m+1} + y_2 x_1^{m-1} + \cdots + y_{m-1}x_1^2 - y_1x_1 + y_2p_2 + \ldots + y_np_n$, where $n \ge m-1$;

$D_m^\pm$) $W(x_1,x_2,p_3,\ldots,p_n,y) = x_1^2x_2 \pm x_2^{m-1} + y_3x_2^{m-2} + \cdots + y_{m-1}x_2^2 - y_1x_1 - y_2x_2 + y_3p_3 + \ldots + y_np_n$, where $n \ge m-1 \ge 3$;

$E_6^\pm$) $W(x_1,x_2,p_3,\ldots,p_n,y) = x_1^3 \pm x_2^4 + y_3x_1x_2^2 + y_4x_1x_2 + y_5x_2^2 - y_1x_1 - y_2x_2 + y_3p_3 + \ldots + y_np_n$, where $n \ge 5$;

E_7) $W(x_1,x_2,p_3,\ldots,p_n,y) = x_1^3 + x_1x_2^3 + y_3x_1x_2^2 + y_4x_1x_2 + y_5x_2^3 + y_6x_2^2 - y_1x_1 - y_2x_2 + y_3p_3 + \ldots + y_np_n$, where $n \ge 6$;

$E_8^\pm$) $W(x_1,x_2,p_3,\ldots,p_n,y) = x_1^3 \pm x_2^5 + y_3x_1x_2^3 + y_4x_1x_2^2 + y_5x_1x_2 + y_6x_2^3 + y_7x_2^2 - y_1x_1 - y_2x_2 + y_3p_3 + \ldots + y_np_n$, where $n \ge 6$.

特異点の単純射影の分類

S_3) $W(p,y) = y_1p_1 + \ldots + y_np_n$, where $n \ge 2$;

$S_m^\pm$) $W(x_1,p_2,\ldots,p_n,y) = \pm e_{m+1} + y_3e_4 + \ldots + y_{m-1}e_m + y_1x_1 + y_2p_2 + \ldots + y_np_n$, where $e_{2k} = x_1^k$, $e_{2k+1} = x_1^{k-1}p_2$, $n \ge m-1 \ge 3$;

T_5) $W(p_1,x_2,p_3,\ldots,p_n,y) = x_2^3 + y_3p_1x_2 + y_4x_2^2 + y_1p_1 + y_2x_2 + y_3p_3 + \ldots + y_np_n$, where $n \ge 4$;

$U_m^\pm$) $W(x_1,x_2,p_3,\ldots,p_n,y) = \pm x_2^{m-3} + y_3x_1^2 + y_4x_1x_2 + y_5x_2^2 + \ldots + y_{m-1}x_2^{m-4} + y_1x_1 + y_2x_2 + y_3p_3 + \ldots + y_np_n$, where $n \ge m-1 \ge 5$;

V_6) $W(p_1,p_2,x_3,p_4,\ldots,p_n,y) = x_3^3 + y_3x_3 + y_4p_1x_3 + y_5p_2x_3 + y_1p_1 + y_2p_2 + y_3x_3 + y_4p_4 + \ldots + y_np_n$, where $n \ge 5$.

この定理の証明の基本的道具は，**対数的ハミルトニアンベクトル場**である．すなわち，そのヴァライティーの上で消えるような関数のきめるハミルトニアンベクトル場である．(cf. [24])．それから，デーモンの理論 [8] の非線形写像空間への一般化である．さらに次の (cf. ,) アーノルド理論 ([5], cf. [11], [27]) の一

[39]一般の型のホイットニーの笠の単純安定射影の分類も当然やるべきことである．ただし，もともとのラグランジュ・ヴァライティーが複雑になればなるほど，その射影は単純になりづらく，したがって，この単純射影のリストへの追加リストは少なくて済むということは十分期待できる．

[40]重複はある．たとえば，$\mathbf{K}=\mathbf{C}$ のときは，符号は不要．また，$\mathbf{K}=\mathbf{R}$ の場合でも，m が偶数のとき，A_m^+ と A_m^-, S_m^+ と S_m^-，U_m^+ と U_m^- はそれぞれ同値である．

たとえば，S_4 型特異点, $n=3$，のコースティックはカスプ曲面である．この座標に関して，ある空間曲線の接線可展面である．また，T_5 型特異点 ($n=4$) は，corank が 2 になる最低次元の例である．このコースティックに名前はまだない．

[41]1 型ホイットニーの笠 Λ_1 の正則点 (非特異点) $z_0 \in \Lambda$ の開近傍では，Λ_1 はラグランジュ部分多様体 (0 型のホイットニーの笠) であり，Λ_1 はその開近傍では，シンプレクティック座標 $(T^*\mathbf{K}^n, z_0) \to (\mathbf{K}^{2n}, 0)$ を適切にとれば，$\{p_1=0,\ldots,p_n=0\}$ と表される．正則点では，この座標に関して母関数族を表している．

般化であり，マザー理論 ([18] V) のシンプレクティック化である，次の結果が鍵となった.

定理 2 ([6]) $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ とする．$\Lambda \subset \mathbf{K}^{2n}$ をホイットニーの笠とし，それに関して，安定なラグランジュ射影 $\pi : (\mathbf{K}^{2n}, z_0) \to \mathbf{K}^n$, $\pi' : (\mathbf{K}^{2n}, z'_0) \to \mathbf{K}^n$ が Λ-同値であるための必要十分条件は，それぞれの中心ファイバー $L = \pi^{-1}(\pi(z_0))$ と $L' = \pi'^{-1}(\pi'(z'_0))$ が Λ-同値であることである.

参考文献

[1] V.I. Arnol'd, *Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities,* Funct. Anal. Appl. **6**–**4** (1972), 254–272.

[2] V. I. Arnol'd, *Singularity Theory – Selected Papers,* London Math. Soc. Lecture Note Series **53**, Cambridge Univ. Press, 1981.

[3] V.I. Arnol'd, *Catastroph Theory, 3rd ed.,* Springer, 1992. オリジナル (ロシア語版) からの日本語訳：V.I. アーノルド,「カタストロフ理論」，蟹江幸博訳，現代数学社，1985.

[4] V.I. Arnol'd, *Singularities of Caustics and Wave Fronts,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

[5] V.I. Arnol'd, S.M. Gusein-Zade, A.N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps I,* Birkhäuser, 1985.

[6] I.A. Bogaevski, G. Ishikawa, *Simple stable Lagrange mappings of an open Whitney umbrella,* Preprint, 2000.

[7] R. Courant, K.O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves,* Applied Math. Sci., **21**, Springer-Verlag, 1948.

[8] J. Damon, *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$,* Memoirs Amer. Math. Soc., vol.**50**, No. **306**, Amer. Math. Soc., 1984.

[9] 深谷賢治,「シンプレクティック幾何学」，岩波書店，1999.

[10] A.B. Givental', *Singular Lagrangian varieties and their Lagrangian mappings,* Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Prob. Mat., (Contemporary Problems of Mathematics) **33**, VITINI, 1988, pp. 55–112. English transl.: J. Sov. Math., **52** (1990), 3246–3278.

[11] M. Golubitsky, V. Guillemin, *Contact equivalence for Lagrangian manifolds,* Adv. in Math., **15** (1975), 357–387.

[12] G. Ishikawa *The local model of an isotropic map-germ arising from one dimensional symplectic reduction,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **111**–**1** (1992), 103–112.

[13] G. Ishikawa, *Symplectic and Lagrange stabilities of open Whitney umbrellas,* Invent. math., **126-2** (1996), 215–234.

[14] G. Ishikawa, *Singularities of developable surfaces,* in London Mathematical Society Lecture Notes Series, **263** (1999), 403–418.

[15] G. Ishikawa, *Determinacy, transversality and Lagrange stability,* Banach Center Publications, **50** (1999), 123–135.

[16] 泉屋周一.「１階偏微分方程式の解の特異性」, 数学 **52–1** (2000), 16–30.

[17] 泉屋周一，石川剛郎,「応用特異点論」, 共立出版社，1998.

[18] J.N. Mather, *Stability of C^∞ mappings I: The division theorem,* Ann. of Math., **87** (1968), 89–104. *II: Infinitesimally stability implies stability,* Ann. of Math., **89** (1969), 254–291. *III: Finitely determined map-germs,* Publ. Math. I.H.E.S., **35** (1968), 127–156. *IV: Classification of stable germs by* $\mathbf{R}$ *algebras,* Publ. Math. I.H.E.S., **37** (1970), 223–248. *V: Transversality,* Adv. Math., **4** (1970), 301–336. *VI: The nice dimensions,* Lecture Notes in Math., **192** (1972), 207–253.

[19] T. Morimoto, *La géométrie des équations de Monge-Ampère,* C. R. Acad. Sci. Paris, **289**, (1979), A-25 –A-28.

[20] 野口広，福田拓生,「初等カタストロフィー」, 共立全書 208, 共立出版, 1976.

[21] 大森英樹,「一般力学系と場の幾何学」, 裳華房, 1991.

[22] T. Poston, I. Stewart, *Catastrophe theory and its applications,* Pitman, 1978. 日本語訳：「カタストロフィー理論とその応用／基礎編」,「カタストロフィー理論とその応用／応用編」, 野口，伊東，戸川訳，サイエンス社.

[23] A. Kh. Rakhimov, *Singularities of Riemannian invariants,* Funct. Anal. Appl., **27**–**1** (1992), 39–50.

[24] K. Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **27** (1981), 265–291.

[25] R. Thom, *Stabilité Structurelle et Morphogénèse, Essai d'une théorie générale des modéles,* Benjamin, 1972. 原書第２版からの日本語訳：R. トム,「構造安定性と形態形成」, 彌永昌吉，宇敷重広訳，岩波書店, 1980.

[26] R. Thom, *Mathematical Models of Morphogenesis,* Ellis Horwood Ltd., 1983.

[27] S. S.-T. Yau, *Criteria for right-left equivalence and right equivalence of holomorphic functions with isolated critical points,* Proc. of Symp. Pure Math., **41** (1984), 291–297.

[28] V.M. Zakalyukin, R.M. Roberts, *On stable singular Lagrangian varieties,* Funct. Anal. Appl. **26–3** (1992), 174–178.

[29] E.C. Zeeman, *Catastrophe theory,* Selected Papers, 1972–1977, Addison-Wesley, 1977.