ラグランジュ・ルジャンドル特異点論の基礎

石川 剛郎 (いしかわ ごうお，Goo Ishikawa, Go-o Ishikawa)
Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060-0810, JAPAN.
E-mail: ishikawa@math.sci.hokudai.ac.jp

２００１年１２月．お茶の水大学.

1　２１世紀の幾何光学 (?)

幾何光学の基本的な概念は，光線 (ray) と波面 (wave front) である．ray の反射 (reflection)，屈折 (refraction)，スネルの法則，フェルマの原理，ホイヘンスの原理などの古典的結果がよく知られている．さらに，障害物に沿った回折 (diffraction) などの現象も幾何光学の考察の対象となっている (たとえば [13])．これらの研究は，現代幾何学の立場から見てもおもしろい素材を提供している．

さて，上のことがらは，**シンプレクティック幾何**と**接触幾何**の枠組みで扱うことができる． ここでは，光線の作るコースティック (焦面) や波面に現れる特異点を**ラグランジュ特異点**や**ルジャンドル特異点**としてどのように捉え解析するか，その概略を説明したい.

関連して，障害物による回折現象に対して，特異点をもったラグランジュ部分多様体やルジャンドル部分多様体が現れること，それが**シンプレクティック３つ組**や**接触３つ組**の理論として整理されること，また，**光学的ラグランジュ特異点の分岐**の話題を，余裕があれば (たぶん余裕がないと思いますが) 取り上げたい.

さらに，”量子光学” も幾何学化したいところだが，それはまだ将来の話です.

2　ラグランジュ・ルジャンドル特異点の基本的概念・用語の解説

2.1　コースティックと波面

Λ を n 次元多様体，$M \subset \Lambda$ を 超曲面 ($n-1$ 次元部分多様体) とする．M を光源と考え，Λ を媒質とみなしたとき，M 上の点 q から Λ 上の点 λ への光学的距離関数 $F(q,\lambda)$ を考える．点 λ を固定し，$q \in M$ を動かしたとき，点 $q \in M$ が関数 $F(q,\lambda)$ の臨界点である条件は，

$$\frac{\partial F}{\partial q_1}(q,\lambda) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial q_{n-1}}(q,\lambda) = 0,$$

で与えられる．この条件は，(フェルマの原理から)， q から出発して λ を通る ray が存在する条件である．また，点 $q \in M$ が関数 $F(q,\lambda)$ の退化した臨界点である条件は，

$$\frac{\partial F}{\partial q_1}(q,\lambda) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial q_{n-1}}(q,\lambda) = 0, \quad \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}\right) = 0,$$

であるが，これは，M から発せられる rays の一部が点 $\lambda \in \Lambda$ に infinitesimal に集中していること，言い換えれば，点 λ が rays の包絡面上にあること，を意味している．ある $q \in M$ に関して，この条件をみたすような $\lambda \in \Lambda$ を集めたものがコースティックである：

$$\left\{\lambda \in \Lambda \mid \exists q \in M; \quad \frac{\partial F}{\partial q_j}(q,\lambda) = 0, (1 \le j \le n-1), \quad \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j}\right) = 0\right\}.$$

また，(ホイヘンスの原理から)，各 $t \in \mathbf{R}$ に対して，$F(q,\lambda) = t$ をみたし，かつ，

$$\frac{\partial F}{\partial q_1}(q,\lambda) = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial q_{n-1}}(q,\lambda) = 0,$$

をみたす $q \in M$ が存在するような $\lambda \in \Lambda$ を集めたものが時刻 t における波面 (wave front) である：

$$\left\{\lambda \in \Lambda \mid \exists q \in M; \quad F(q,\lambda) = t, \quad \frac{\partial F}{\partial q_j}(q,\lambda) = 0, (1 \le j \le n-1)\right\}.$$

2.2 ラグランジュ特異点とルジャンドル特異点

$T^*\Lambda$ を Λ 上の 余接束 (cotangent bundle) とし，θ を $T^*\Lambda$ 上のリュウビル１形式 (Liouville 1-form) とし，$\omega = d\theta$ を $T^*\Lambda$ 上のシンプレクティック形式 (symplectic form) とする．

例 2.1 $\Lambda = \mathbf{R}^n$ の座標系を $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とする． $\xi \in T^*\mathbf{R}^n$ を $\xi = p_1dx_1 + p_2dx_2 + \cdots + p_ndx_n$ $(p_i \in \mathbf{R})$ と一意的に表したとき，$(p_1, p_2, \ldots, p_n; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は $T^*\Lambda$ の座標系であり，$T^*\Lambda$ 上の微分形式として

$$\theta = p_1dx_1 + p_2dx_2 + \cdots + p_ndx_n, \quad \omega = dp_1 \wedge dx_1 + dp_2 \wedge dx_2 + \cdots + dp_n \wedge dx_n,$$

と表される．

話のキーワードはラグランジュ部分多様体である．

部分多様体 $L \subset T^*\Lambda$ が**ラグランジュ部分多様体** (Lagrangian submanifold)
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 各点 $x \in L$ について，$T_xL \subset T_x(T^*\Lambda)$ のシンプレクティック部分空間
$\Leftrightarrow \dim L = \dim \Lambda$ であり，かつ，シンプレクティック形式の L への制限 $\omega|_L = 0$.

$L \subset T^*\Lambda$ をラグランジュ部分多様体とし，$\pi : T^*\Lambda \to \Lambda\ \xi = (p,x) \mapsto x$ を自然な射影 (ラグランジュ・ファイブレーション) とするとき，射影を L 上に制限して得られる写像 $\pi|_L : L \to \Lambda$ を**ラグランジュ写像** (Lagrangian mapping) とよび，その特異点をラグランジュ特異点 (Lagrangian singular point) とよび，特異値集合を**コースティック** (caustic) とよぶ.

$T^*\Lambda$ のラグランジュ部分多様体とラグランジュ写像の例を挙げる：

例 2.2 可微分関数 $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ について，その**グラディエント写像** $\mathrm{grad}(h) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を，$q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbf{R}^n$ に対し，

$$\mathrm{grad}(h)(q) = (\frac{\partial h}{\partial q_1}(q), \ldots, \frac{\partial h}{\partial q_n}(q))$$

で定義する．$T^*\mathbf{R}^n$ の正準座標を $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ と表す．このとき，うめ込み $f : \mathbf{R}^n \to T^*\mathbf{R}^n$ を

$$p_i \circ f = q_i,\ x_i \circ f = \frac{\partial h}{\partial q_i},\ 1 \le i \le n,$$

で定めると，f はラグランジュうめ込みである．実際，$T^*\mathbf{R}^n$ 上のリュウビル 1-形式 $\theta = \sum_{i=1}^n p_idx_i$ について，

$$f^*\theta = \sum_{i=1}^n q_i d\frac{\partial h}{\partial q_i} = d\left(\sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial h}{\partial q_i} - h\right)$$

であるから，$f^*\omega = d(f^*\theta) = 0$ となる．さらに，$\mathrm{grad}(h) = \pi \circ f$ であるから，$\mathrm{grad}(h)$ はあるラグランジュうめ込みからきまるラグランジュ写像である．

例 2.3 $\alpha : \Lambda \to T^*\Lambda$ を Λ 上の閉１形式 (closed 1-form) (を section をみなしたもの) とすると，α は**ラグランジュはめ込み** (Lagrangian immersion) であり，$\alpha(\Lambda)$ はラグランジュ部分多様体である．実際，微分形式として $\alpha^*\theta = \alpha$ なので，$\alpha^*\omega = \alpha^*(d\theta) = d(\alpha^*\theta) = d\alpha = 0$.

例 2.4 $M \subset \Lambda$ を部分多様体とする．このとき，M の Λ における**余法束** (conormal bundle(の total space))

$$N^*\Lambda := \{\xi \in T^*\Lambda \mid \exists x \in M; \xi \in T_x^*M, \xi|_{T_xM} = 0\}$$

はラグランジュ部分多様体である．実際，M の次元によらず $\dim N^*M = \dim \Lambda$ であり，$\theta|_{N^*M} = 0$, したがって，$\omega|_{N^*M} = 0$. (なお，Λ に計量が与えられているときは，法束 $NM \subset T\Lambda \cong T^*\Lambda$ についても同様).

例 2.5 M を $\mathbf{R}^n$ の部分多様体とする．ここで，$\mathbf{R}^n$ には標準的な計量をいれて，ユークリッド空間と考えている．このとき $T\mathbf{R}^n$ と $T^*\mathbf{R}^n$ には計量からきまる同型があり，$T\mathbf{R}^n$ には自然にシンプレクティック構造がはいることに注意する．

各 $x \in M$ について，$T_x\mathbf{R}^n$ における T_xM の直交補空間を N_xM と表そう．N の法バンドル (の全空間) を

$$NM = \{(v, x) \mid x \in M, v \in N_xM\}$$

でさだめる．NM は n 次元多様体である．$T\mathbf{R}^n$ と $T^*\mathbf{R}^n$ との対応で，NM と余法バンドル N^*M が対応し，N^*M は $T^*\mathbf{R}^n$ のラグランジュ部分多様体だから，NM は $T\mathbf{R}^n$ のラグランジュ部分多様体である．**法指数写像** $e : NM \to \mathbf{R}^n$ を $e(x, v) = x + v$ で定義する．写像 e はベクトル v を x を始点とするベクトルと考え，その終点を対応させるものである．e の特異点を調べることにより，部分多様体 $M \subset \mathbf{R}^n$ の位置の特異性を解析することができる．このとき，e はあるラグランジュうめこみに関するラグランジュ写像である．実際，測地流 $\Phi_t : T\mathbf{R}^n \to T\mathbf{R}^n$ について，$f = \Phi_1|_{NM} : NM \to T\mathbf{R}^n$ はラグランジュうめこみであり，$e = \pi \circ f$ である．

例 2.6 $L \subset T^*\Lambda$ をラグランジュ部分多様体とし，$\Phi : T^*\Lambda \to T^*\Lambda$ を**シンプレクティック微分同相写像** (symplectic diffeomorphism, symplectomorphism), $\Phi^*\omega = \omega$, とするとき，$\Phi(L) \subset T^*\Lambda$ もラグランジュ部分多様体である．

例 2.7 h を $T^*\Lambda$ 上の可微分関数とする．このとき，$T^*\Lambda$ 上に h をハミルトン関数とするハミルトンベクトル場 X_h が定義される．いま，ハミルトンベクトル場 X_h の流れ Φ_t が大域的に定義されていると (簡単のため) 仮定する：$\Phi_t : T^*M \to T^*M$. このとき，各 t について，Φ_t はシンプレクティック微分同相写像である．また，任意の部分多様体 $M \subset \Lambda$ について，その余法束 $L = N^*M \subset T^*\Lambda$ はラグランジュ部分多様体である．すると，$L_t = \Phi_t(L)$ もラグランジュ部分多様体である．

Λ をリーマン多様体，たとえば，ユークリッド空間とし，h をエネルギー関数 $h(\xi) = \dfrac{1}{2}\|\xi\|^2$ にとったとき，$e = \pi \circ \Phi_1|_N^*M : N^*M \to \Lambda$ を M に付随した**指数写像**とよぶ．また，e の特異値集合を M の**共役跡**あるいは**コースティック**，**焦線**，**火線**，**焦面**と (問題意識に応じて) などとよぶ．

上で挙げた例と関連して，接触構造とルジャンドル部分多様体について説明する．

多様体 M 上の**接触構造** (contact structure) とは，接束 TM の余次元 1 の subbundle $D \subset TM$ であり，”完全非可積分条件”をみたすもののことである．ここで，**完全非可積分条件**とは，局所的に $D = \{\alpha = 0\}$ という具合に微分１形式 α を使って D を表したとき，各点 $x \in M$ について，$\alpha|_{D_x}$ がシンプレクティック形式であるという条件である．接触構造が付与された多様体 (M, D) を接触多様体とよぶ．接触多様体の次元は奇数である．

$(2n+1)$ 次元接触多様体 (M, D) の部分多様体 $\mathcal{L} \subset M$ が**ルジャンドル部分多様体** (Legendrian submanifold) とは，$\mathcal{L}$ が D に関する n 次元積分多様体であることを言う．つまり，$\dim \mathcal{L} = n$ で

あり，各点 $x \in M$ について $T_xL \subset D_x$ をみたすときである．(接触構造 D の積分多様体の最大次元が n).

接触多様体の例としては，関数の 1 ジェットの空間や，接触要素の作る空間 ($PT^*\Lambda$ や，$PT^*(\Lambda \times \mathbf{R}) \subset T^*\Lambda \times \mathbf{R}$ ($T^*\Lambda$ の接触化) や，ある種のハミルトン関数のレベル超曲面 ($\subset T^*\Lambda$) などがある．

例 2.8 $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{2n+1}$ の座標を $p_1, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n, r$ とする．ただし，$x_1, \ldots, x_n$ は $\mathbf{R}^n$ の座標で，p_j は 1 階偏微分に，r は関数値に対応する座標である．$\alpha = dy - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ とおくと，α は $\mathbf{R}^{2n+1}$ 上の接触構造を定める．また，可微分関数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ について，1-ジェット切断

$$j^1 f : \mathbf{R}^n \to J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), j^1 f(x_1, \ldots, x_n) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, x_1, \ldots, x_n, f(x))$$

は**積分写像** (integral map), $(j^1 f)^* \alpha = 0$, である．したがって，$j^1 f(\mathbf{R}^n)$ は $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ のルジャンドル部分多様体である．

例 2.9 A を $n+1$ 次元多様体とする．その余接バンドル T^*A からその零切断をとりのぞき，0 でないスカラー倍を同一視してできる $2n+1$ 次元多様体 PT^*A を A の**接触要素の作る多様体**とよぶ．この多様体は自然に (tautological に) 接触構造をもつ：

$c \in PT^*A$ に対し，c は $\pi(c) \in A$ における接触要素 ($T^*_{\pi(c)}A - \{0\}$ の要素を 0 でないスカラー倍で同一視したもの，つまり，$T_{\pi(c)}A$ の余次元 1 の部分ベクトル空間) であることに注目し，$D_c := \pi_*^{-1}(c)$ とおく．ここで，$\pi_* : T_c(PT^*A) \to T_\pi(c)$ は微分写像である．このとき，D は PT^*A 上の接触構造を定める．

$\psi = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ を座標近傍 $U \subset A$ 上の局所座標系とする．対応する T^*U 上のシンプレクティック座標系を

$$\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}; x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$$

とする．すると，$PT^*A \cap \pi^{-1}(U)$ の点は $\mathbf{R}P^n \times \psi(U)$ の点

$$([\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}], x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$$

で記述される．たとえば，$V = PT^*A \cap \pi^{-1}(U) \cap \{\xi_{n+1} \neq 0\}$ では，$\xi_i/\xi_{n+1} = -p_i, 1 \leq i \leq n$ とおけば，$p_1, \ldots, p_n; x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ が局所座標系となる．このとき，

$$\alpha = dx_{n+1} - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$$

とおけば，この局所座標近傍 V 上で $D = \{\alpha = 0\}$ と表される．実際，$c \in V$ について，$v \in T_c(PT^*A)$ をとると，$v \in K_c$ の条件は $\pi_* v$ が c の定める接触要素に含まれることである．ところが，c の定める接触要素は $\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i dx_i = 0$ すなわち，$-\sum_{i=1}^n p_i dx_i + dx_{n+1} = 0$ であり，これが，D_c を定めるからである．

さて，$M \subset A$ を部分多様体としたとき，その射影余法束 (projective conormal bundle)

$$PN^*M := \{[\xi] \in PT^*A \mid \exists x \in M; \xi \in T_x^*M, \xi|_{T_xM}\}$$

(つまり，$N^*M \subset T^*A$ のファイバーワイズ射影化) は PT^*A のルジャンドル部分多様体である．実際，M の次元にかかわらず，$\dim(PN^*M) = n$ であり，$\pi_*(T_[\xi]PN^*M) = T_x^*M \subseteq \{\xi = 0\}$.

例 2.10 $T^*\Lambda$ 上のリュウビル形式 θ に対し，$T^*\Lambda \times \mathbf{R}$ 上の微分 1 形式 $\alpha = dr - \theta$ は $T^*\Lambda \times \mathbf{R}$ 上に接触構造を定める．

例 2.11 $T^*\Lambda$ 上の関数 $h : T^*\Lambda \to \mathbf{R}$ が**ファイバー方向に** m **次同次関数**であるとは，シンプレクティック座標系について，

$$h(p,x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)p^\alpha$$

と p に関すれば m 次同次式で表されることである．ここで，α は非負整数による多重指数である：$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$. この性質はシンプレクティック座標系のとり方によらない．

たとえば，Λ がリーマン多様体のとき，エネルギー関数 (を cotangent bundle 上の関数とみなしたもの) はファイバー方向に 2 次同次関数である．

$h : T^*\Lambda \to \mathbf{R}$ をファイバー方向に m 次同次関数とする．すると，$c \neq 0$ について，$S = h^{-1}(c)$ は $T^*\Lambda$ の中のなめらかな超曲面であり，リュウビル形式を S に制限したもの $\theta_M|_S$ は S 上に接触構造を与える．また，$X_h|_S$ は (S に接する) 接触ベクトル場 (接触構造を保つベクトル場) であり，より強く $(L_{X_h}\theta)|_S = 0$ がなりたつ．X_h の誘導する流れを $\Phi_t : S \to S$ と書くと，Φ_t は各 $t \in \mathbf{R}$ について (定義される範囲で) 接触微分同相写像 (contact diffeomorphism, contactomorphism) である．

また，$\mathcal{L} = S \cap N^*C$ は S のルジャンドル部分多様体である．したがって，$\mathcal{L}_t = \Phi_t(\mathcal{L})$ は S のルジャンドル部分多様体である．$\pi_S : S \to M$ を射影とするとき，$\pi_S(L_t)$ を M を波源とする時刻 t の**波面** (wave front) とよぶ．

この場合．波面の特異点の軌跡がコースティックである．

2.3 ラグランジュ部分多様体のラグランジュ同値

Λ を n 次元多様体，$T^*\Lambda$ を Λ 上の余接束とし，L を $T^*\Lambda$ のラグランジュ部分多様体とする．底空間 Λ への射影の制限 $\pi|_L : L \to \Lambda$ を**ラグランジュ写像**とよび，その特異点を**ラグランジュ特異点**とよぶ．そして，$\pi|_L$ の特異値集合を L の**コースティック** (**焦線，火線，焦面**) とよぶ．

L, L' をそれぞれ $T^*\Lambda, T^*\Lambda'$ のラグランジュ部分多様体とする．L と L' が**ラグランジュ同値** (Lagrange equivalent) とは，ラグランジュ微分同相写像 $\tau : T^*\Lambda \to T^*\Lambda'$ があって，$\tau(L) = L'$ となるときである．

L と L' がラグランジュ同値のとき，定義からすぐわかるように，ある微分同相 $\bar{\sigma} : \Lambda \to \Lambda'$ により，L のコースティックは L' のコースティックに写される．このコースティックの局所的な構造の研究を問題とする．

局所的な問題なので，芽の言葉で定式化しておく．$T^*\Lambda$ のラグランジュ部分多様体芽 L と $T^*\Lambda'$ のラグランジュ部分多様体芽 L' が**ラグランジュ同値** であるとは，L と L' の基点をそれぞれ ξ_0 と ξ_0' とするとき，ラグランジュ微分同相写像芽 $\tau : (T^*\Lambda, \xi_0) \to (T^*\Lambda', \xi_0')$ があって，$\sigma(L) = L'$ のときにいう．

ラグランジュ特異点の局所構造を調べるために，L の各点 $x \in L$ について，L をパラメーター付けるラグランジュはめこみ芽 $f : (N, u_0) \to (L, x_0) \subset (T^*\Lambda, x_0)$ をとり，合成 $\pi \circ f : (N, u_0) \to \Lambda$ を**ラグランジュ写像**とよび，その特異点を**ラグランジュ特異点**とよぶ．

ラグランジュはめ込み芽 $f : (N, u_0) \to T^*\Lambda$ と $f' : (N', u_0') \to T^*\Lambda'$ が**ラグランジュ同値**であるとは，微分同相写像芽 $\sigma : (N, u_0) \to (N', u_0')$ とラグランジュ微分同相写像芽 $\tau : (T^*\Lambda, f(u_0)) \to (T^*\Lambda', f'(u_0'))$ があって，$\tau \circ f = f' \circ \sigma$ が成り立つときにいう．ただし，ラグランジュ微分同相写像芽 $\tau : (T^*\Lambda, f(u_0)) \to (T^*\Lambda', f'(u_0'))$ とは，底空間のある微分同相写像芽 $\bar{\tau} : (\Lambda, \pi(f(u_0))) \to (\Lambda', \pi(f(u_0')))$ と可換なシンプレクティック微分同相芽のことである．

はめ込み芽について，その像は部分多様体芽として定まる．このとき，2 つのはめ込み芽がラグランジュ同値であることとそれぞれの像がラグランジュ同値であることは同じ条件である．

2.4 ラグランジュ部分多様体の母関数族

この小節の議論は本質的に局所的なものなので，すべてのことを局所モデル上で行う．

$F : (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n, (0,0)) \to (\mathbf{R}, 0)$ を関数芽とする．ここで，$F = F(q,\lambda)$, $(q,\lambda) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n$ の $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ を**パラメーター**とみなし，F を変数 q の関数の族と考える．$q = (q_1, \ldots, q_k)$ を**内部変数**とよぶ．さて，

$$C(F) = \{(q,\lambda) \in (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n, (0,0)) \mid \frac{\partial F}{\partial q_1}(q,\lambda) = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial q_k}(q,\lambda) = 0\}$$

を関数族 F の**カタストロフ集合** (catastrophe set) とよぶ．これは，$\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n$ の $(0,0)$ における部分集合芽であり，各パラメーター λ をとめたときの x の関数 $F(q,\lambda)$ の (0 の近くの) 臨界点をいっせいに記述する．もし，$0 \in \mathbf{R}^k$ が $F(q,0)$ の臨界点でなければ，$C(F)$ は空集合芽となる．

例 2.12 *(1)* $k = 1, n = 1$ とし，$F(q_1, \lambda_1) = q_1^3 + \lambda_1 q_1$ とする．$\dfrac{\partial F}{\partial q_1} = 3q_1^2 + \lambda_1$ であるから，

$$C(F) = \{(q_1, \lambda_1) \in (\mathbf{R} \times \mathbf{R}, (0,0)) \mid 3q_1^2 + \lambda_1 = 0\}$$

である．$C(F)$ は 1 次元部分多様体芽である．

(2) $k = 1, n = 2$ とし，$F(q_1, \lambda_1) = q_1^4 + \lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_1$ とする．

$$C(F) = \{(q_1, \lambda) \in (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2, (0,0)) \mid 4q_1^3 + 2\lambda_1 q_1 + \lambda_2 = 0\}$$

である．$C(F)$ は 2 次元部分多様体芽である．

(3) $k = 1, n = 1$ とし，$F(q_1, \lambda_1) = q_1^4 + \lambda_1 q_1^2$ とする．

$$C(F) = \{(q_1, \lambda_1) \in (\mathbf{R} \times \mathbf{R}, (0,0)) \mid 4q_1^3 + 2\lambda_1 q_1 = 0\}$$

である．$C(F)$ は部分多様体芽ではない．

ここでわれわれが注目したいのは，カタストロフ集合が (パラメーター空間の次元と同じ) n 次元の部分多様体となるような関数族である．

仮定：$0 \in \mathbf{R}^k$ は $F(q,0)$ の臨界点であり，写像芽 $(\dfrac{\partial F}{\partial q_1}, \ldots, \dfrac{\partial F}{\partial q_k}) : (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n, (0,0)) \to (\mathbf{R}^k, 0)$ が $(0,0)$ でしずめ込みである．

関数族 $F : (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n, (0,0)) \to (\mathbf{R}, 0)$ が上の仮定をみたすとき，F は**モース関数族** (Morse family) であるという．(**一般相関数** (generalized phase function) ともよばれる)．このとき，陰関数定理から，$C(F)$ は $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n$ の $(0,0)$ における余次元 k したがって次元 n の部分多様体芽である．

$T^*\mathbf{R}^n$ の正準座標系を $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ とする．

補題 2.13 F がモース関数族であれば，写像芽 $L(F) : (C(F), (0,0)) \to \mathbf{R}^{2n} = T^*\mathbf{R}^n$ を

$$(x_i \circ L(F))(q,\lambda) = \lambda_i,\ (p_i \circ L(F))(q,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}(q,\lambda),\ (1 \leq i \leq n),$$

で定義すると，$L(F)$ はラグランジュはめ込み芽である．

さて，上でみたように，モース関数族からラグランジュはめ込みが構成できる．この構成は一般的であり，次に見るように，すべてのラグランジュ部分多様体芽がモース関数族から得られる．以下，誤解の生じない限り $(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n, (0,0))$ や $(C(F), (0,0))$ を簡単に $(\mathbf{R}^{k+n}, 0)$ や $(C(F), 0)$ などと書くことにする．

補題 2.14 $(T^*\mathbf{R}^n, 0)$ のラグランジュ部分多様体芽 L は，ある分解 $I \cup J = \{1, \ldots, n\}$ と関数芽 $S = S(p_I, x_J)$, $S : (\mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}$ について次の関係式で与えられる：

$$x_I = \frac{\partial S}{\partial p_I}, \quad p_J = -\frac{\partial S}{\partial x_J},$$

すなわち，埋め込み芽

$$(p_I, x_J) \mapsto (\frac{\partial S}{\partial p_I},\ x_J,\ p_I,\ -\frac{\partial S}{\partial x_J})$$

で実現される．

定理 2.15 $(T^*\mathbf{R}^n, 0)$ の各ラグランジュ部分多様体芽 L について，あるモース関数族 $F : (\mathbf{R}^{k+n}, 0) \to (\mathbf{R}, 0)$ があって，L はラグランジュはめ込み芽 $L(F) : (C(F), 0) \to (T^*\mathbf{R}^n, 0)$ の像として得られる．

Proof: 補題 2.14 で，$F : (\mathbf{R}^{k+n}, 0) \to (\mathbf{R}, 0)$ を，

$$F(p_I, x) := \sum_{i \in I} p_i x_i - S(p_I, x_J),$$

とおけば良い． □

このとき，モース関数族 F をラグランジュ部分多様体芽 L の**母関数族** (generating family) とよぶ.

2.5 母関数族の R^+-同値とラグランジュ同値

関数族 $F : (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}$ と $G : (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}$ が R^+-**同値** (R^+-equivalent) とは，微分同相写像芽 $\Phi : (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n, 0)$ で $\Phi(q, \lambda) = (\Psi(q, \lambda), \varphi(\lambda))$ の形のものと，関数芽 $h : (\mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}$ があって，

$$G(q, \lambda) = F(\Phi(q, \lambda)) + h(\lambda)$$

と表されるときにいう．(P-$\mathcal{R}^+$-同値ともよぶが，誤解が生じないと思われるので，ここでは単に $\mathcal{R}^+$-同値とよぶ).

$\pi : (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ をパラメーター空間への射影, $\pi(q, \lambda) = \lambda$, とすると，上の Φ の形の制約は，$\pi \circ \Phi = \varphi \circ \pi$ をみたす微分同相写像芽 $\varphi : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ があるということである．そして，満たすべき関係式は，簡潔に，$G = F \circ \Phi + h \circ \pi$ と表される．いいかえれば，パラメーターの変換と，各パラメーターごとの変数変換および，各パラメーターごとの関数値の定数だけの“ずらし”によって変換される関数族を R^+-同値とよぶわけである．

さらに，一般に内部変数の個数の異なる関数族 $F : (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}$ と $G : (\mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}$, $F = F(q, \lambda), G = G(q', \lambda)$, について考える．

付加的な内部変数に関する非退化 2 次形式 $Q(q''), q'' \in \mathbf{R}^{k'}$ および $R(q'''), q''' \in \mathbf{R}^{\ell'}$ があって

$$F + Q : (\mathbf{R}^{k+k'} \times \mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R} \quad と \quad G + R : (\mathbf{R}^{\ell+\ell'} \times \mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}$$

が R^+-同値のとき，F と G は**安定** R^+-**同値** (stably R^+-equivalent) であるという．ここで，$(F + Q)(q, q'', \lambda) = F(q, \lambda) + Q(q'')$, $(G + R)(q', q''', \lambda) = G(q', \lambda) + R(q''')$, であり，($\mathcal{R}^+$-同値の定義から) 当然，$k + k' = \ell + \ell'$ である．

次の定理は，Hörmander，Pham，Arnol'd 達により示されたものである．ラグランジュ部分多様体のラグランジュ同値による局所的分類を，関数族の分類に帰着させるものであり，きわめて重要である．

定理 2.16 (**ラグランジュ特異点論の基本定理**) $T^*\mathbf{R}^n$ の 0 における 2 つのラグランジュ部分多様体芽がラグランジュ同値であるための必要十分条件は，それらの母関数族が安定 $\mathcal{R}^+$-同値なことである．

さて，$L \subset T^*\Lambda$ をラグランジュ部分多様体，$\pi : T^*\Lambda \to \Lambda$ をラグランジュ・ファイブレーションとする．ラグランジュ写像 $f = \pi|_L : L \to \Lambda$ が，点 $\xi_0 \in L$ で**ラグランジュ安定** (Lagrange stable) であるとは，L をラグランジュ部分多様体として少し摂動しても，もともとの芽 (L, ξ_0) とラグランジュ同値な芽が ξ_0 の近くに消えずに生き残るということである．このとき，ラグランジュ写像芽 $f : (L, \xi_0) \to \Lambda$ をラグランジュ安定とよぶ．

また，安定ラグランジュ写像芽 $f : (L, \xi_0) \to \Lambda$ が**ラグランジュ単純** (Lagrange simple) であるとは，その或る代表 $f : U \to \Lambda$ があって，点 $\xi \in U$ を動かして，ラグランジュ写像芽 $f_\xi : (L, \xi) \to \Lambda$ のラグランジュ同値類の集合が有限集合であることを言う．

このとき，次の定理が知られている：

定理 2.17 ラグランジュ写像芽 $f : (L, \xi_0) \to T^*\Lambda$ について，f がラグランジュ安定である必要十分条件は，f の母関数族が R^+-バーサルであることである．ただし，関数族 $F : (\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n, (0,0)) \longrightarrow (\mathbf{R}, 0)$, $F = F(q, \lambda)$ が $\mathcal{R}^+$**-バーサル**であるとは，

$$\mathcal{E}_m = \langle \frac{\partial F}{\partial q_1}|_{\mathbf{R}^m \times \{0\}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_m}|_{\mathbf{R}^m \times \{0\}} \rangle_{\mathcal{E}_m} + V_F$$

が成り立つこと *(*と同値*)* である．ここで，E_m は，q に関する可微分関数芽の全体のなす $\mathbf{R}$-代数であり，

$$V_F = \langle 1, \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}|_{\mathbf{R}^m \times \{0\}}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_n}|_{\mathbf{R}^m \times \{0\}} \rangle_{\mathbf{R}}$$

である．

定理 2.18 ラグランジュ写像芽 f が安定かつ単純であるための必要十分条件は，f の母関数族 $F : (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}$ について，$\phi = F(\cdot, 0) : (\mathbf{R}^k, 0) \to \mathbf{R}$ が単純特異点 *(simple singularity, 0-modal singularity)* であることである．

定理 2.19 (**ラグランジュ単純安定写像の分類**) すべての単純安定ラグランジュはめ込み芽は，下のリストにあるいずれかの関数 S について $F = \sum_{i \in I} p_i x_i - S(p_I, x_J)$ とおくとき，$L(F) : (\mathbf{R}^n, 0) \to T^*\mathbf{R}^n$,

$$L(F)(p_I, x_J) = (p_I,\ -\frac{\partial S}{\partial x_J},\ \frac{\partial S}{\partial p_I},\ x_J).$$

にラグランジュ同値である．

$S = S(p_I, x_J)$ のリスト

$$S = \pm p_1^{m+1} + x_{m-1}p_1^{m-1} + \cdots + x_2 p_1^2$$
$(I = \{1\}, m-1 \leq n)$　A_m型特異点.

$$S = \pm p_1^2 p_2 \pm p_2^{m-1} + x_{m-1}p_2^{m-2} + \cdots + x_3 p_2^2$$
$(I = \{1, 2\}, m-1 \leq n)$　D_m型特異点.

$$S = \pm p_1^3 \pm p_2^4 + x_5 p_1 p_2^2 + x_4 p_1 p_2 + x_3 p_2^2$$
$(I = \{1, 2\}, 5 \leq n)$　E_6型特異点.

$$S = \pm p_1^3 \pm p_1 p_2^3 + x_6 p_1 p_2^2 + x_5 p_1 p_2 + x_4 p_2^3 + x_3 p_2^2$$
$(I = \{1, 2\}, 6 \leq n)$　E_7型特異点.

$$S = \pm p_1^3 \pm p_2^5 + x_7 p_1 p_2^3 + x_6 p_1 p_2^2 + x_5 p_1 p_2 + x_4 p_2^3 + x_3 p_2^2$$
$(I = \{1, 2\}, 7 \leq n)$　E_8型特異点.

単純ラグランジュ特異点の記号を用いると，次の特異点のみを持つことはラグランジュ写像のジェネリックな性質である：

$n = 1$ のとき，A_2 型特異点，$n = 2$ のとき，A_2, A_3 型特異点，$n = 3$ のとき，A_2, A_3, A_4, D_4 型特異点，$n = 4$ のとき，$A_2, A_3, A_4, A_5, D_4, D_5$ 型特異点，$n = 5$ のとき，$A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, D_4, D_5, D_6, E_6$ 型特異点.

2.6　ルジャンドル特異点とその母関数族

W を $2n+1$ 次元接触多様体，A を $n+1$ 次元多様体とし，$\pi : W \to A$ をルジャンドルファイブレーションとする．たとえば，PT^*A を A の接触要素のなす接触多様体としたとき，射影 $\pi : PT^*A \to A$ はルジャンドルファイブレーションであった．いま，L を W のルジャンドル部分多様体とする．L は n 次元であることに注意する．このとき，射影 $\pi : PT^*A \to A$ の制限 $\pi|_L : L \to A$ を**ルジャンドル写像**，その特異点を**ルジャンドル特異点**とよぶ．また，π による L の像 $\pi(L) \subset A$ を L の**波面** (**波面集合**，wave front, front) とよぶ．

例 2.20 $S \subset \mathbf{R}^n$ を部分多様体とし，NS を S の法束とする．

$$\Gamma = \{(x, v) \in NS \mid \|v\| = 1\}$$

とおくと Γ は $n-1$ 次元多様体である．$\varphi_t : \Gamma \to \mathbf{R}^n$ を $\varphi_t(x, v) = x + tv$ で定める．このとき，φ_t はあるルジャンドルうめ込みに関するルジャンドル写像であり，$\varphi_t(\Gamma)$ は波面である．このことは，次のように説明される．

一般に，L を W のルジャンドル部分多様体とし，$\tau : W \to W$ を接触微分同相写像とする．すると，$L' = \tau(L)$ も W のルジャンドル部分多様体である．いま，$h : T^*A \to \mathbf{R}$ を A の余接束上の関数とし，ファイバー方向に同次であるとする．レベル超曲面 $W = h^{-1}(c), c \neq 0$ にはリュウビル形式を制限して接触構造が入る．このとき，h をハミルトン関数とするハミルトニアンベクトル場 X_h の定める流れ $\Phi_t : T^*A \to T^*A$ が定義されるとすると，Φ_t は W を保ち，$\Phi_t : W \to W$ は接触微分同相写像となる．$L \subset W$ をルジャンドル部分多様体とすると，$L_t = \Phi_t(L)$ はルジャンドル部分多様体である．いま，$\mathbf{R}^n$ のユークリッド計量について，同型 $T\mathbf{R}^n \cong T^*\mathbf{R}^n$ がある．とくに，h

をエネルギー関数 $h(p)=\frac{1}{2}\|p\|^2$ にとった時に，$W=h^{-1}(\frac{1}{2})$ を考える．この対応で Γ はルジャンドル

$$L=N^*S\cap W=\{(x,p)\in N^*S\mid \|p\|=1\}$$

に対応する．このとき，$\varphi_t=\pi\circ\Phi_t|_L$ が得られる．

ルジャンドル特異点の局所的構造を調べるため，一般にルジャンドルはめこみ芽 $f:(N,u_0)\to PT^*A$ を扱う．その際，２つのルジャンドルはめこみ芽 f と $f':(N',u_0')\to PT^*A'$ が**ルジャンドル同値** (Legendre equivalent) とは，微分同相写像芽 $\sigma:(N,u_0)\to(N',u_0')$ とルジャンドル微分同相写像 $\tau:(PT^*A,f(u_0))\to(PT^*A',f'(u_0'))$ があって，$\tau\circ f=f'\circ\sigma$ であるときにいう．ここで，ルジャンドル微分同相写像 τ はある微分同相写像 $\varphi:(A,\pi f(u_0))\to(A',\pi' f'(x_0'))$ が自然に定めるルジャンドルリフトの形で与えられることに注意する．

$(\mathbf{R}^{2n+1},0)$ を接触多様体の局所モデルとする．座標を (x,y,p) とし，接触形式は $\alpha=dy-\sum_{i=1}^n p_idx_i$ とする．

補題 2.21 $(\mathbf{R}^{2n+1},0)$ のルジャンドル部分多様体芽 L は，ある分解 $I\cup J=\{1,\dots,n\}$, $I\cap J=\emptyset$ と関数芽 $S=S(p_I,x_J)$, $S:(\mathbf{R}^n,0)\to\mathbf{R}$ について次の関係式で与えられる：

$$x_I=\frac{\partial S}{\partial p_I},\quad y=p_I\frac{\partial S}{\partial p_I}-S\quad p_J=-\frac{\partial S}{\partial x_J}.$$

すなわち，L はルジャンドルうめ込み芽

$$(p_I,x_J)\mapsto(\frac{\partial S}{\partial p_I},\ x_J,\ p_I\frac{\partial S}{\partial p_I}-S,\ p_I,\ -\frac{\partial S}{\partial x_J})$$

で実現される．

2.7 母関数族の $\mathcal{K}$-同値とルジャンドル同値

$F:(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{n+1},(0,0))\to(\mathbf{R},0)$ を可微分関数芽とし，

$$V(F)=\{(q,\lambda)\in(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{n+1},(0,0))\mid F(q,\lambda)=0\}$$

とおく．$\lambda\in\mathbf{R}^{n+1}$ をパラメーターと考え，$V(F)$ あるいは方程式 $F=0$ を $\mathbf{R}^k$ の超曲面族とみなす．各超曲面の特異点を集めたもの

$$\begin{aligned}\Sigma(F)&=\{(q,\lambda)\in V(F)\mid(q,\lambda)\text{ において }\frac{\partial F}{\partial q_1}=\cdots=\frac{\partial F}{\partial q_n}=0\}\\&=\{(x,\lambda)\mid(q,\lambda)\text{ において }F=\frac{\partial F}{\partial q_1}=\cdots=\frac{\partial F}{\partial q_n}=0\}\end{aligned}$$

$(\subset(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{n+1},(0,0)))$ を超曲面族 $F=0$ の**特異集合**とよぶ．

超曲面族 $F(q,\lambda)=0$ が**モース超曲面族**とは，$F(q,0)=0$ が $q=0$ で特異点を持ち，しかも写像芽

$$(F,\frac{\partial F}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial q_n}):(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{n+1},(0,0))\to(\mathbf{R}^{k+1},0)$$

がしずめ込みであるときにいう．あとの条件は

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial q}&\dfrac{\partial^2F}{\partial q\partial q}\\[2em]\dfrac{\partial F}{\partial\lambda}&\dfrac{\partial^2F}{\partial q\partial\lambda}\end{pmatrix}(0,0)=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\dfrac{\partial^2F}{\partial q\partial q}\\[2em]\dfrac{\partial F}{\partial\lambda}&\dfrac{\partial^2F}{\partial q\partial\lambda}\end{pmatrix}(0,0)$$

の階数が $k+1$ であることである．とくに，k 次行列 $\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial q \partial q}(0,0)\right)$ は正則であり，ある i について，$\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}(0,0) \neq 0$ である．

例 2.22 $G:(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n,(0,0)) \to \mathbf{R}$ をモース関数族とする．このとき，$F(q,\lambda,r) = r - G(q,\lambda)$ とおくと，$V(F) = \{F=0\} \subset (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n+1},(0,0))$ は G のグラフを表し，超曲面族 $F=0$ はモース超曲面族である．

$\{F=0\}$ がモース超曲面族のとき，特異集合 $\Sigma(F)$ は n 次元部分多様体である．

各点 $(q,\lambda) \in \Sigma(F)$ について，$T = T_{(q,\lambda)}V(F)$ は $T_{(q,\lambda)}\mathbf{R}^{k+n+1}$ の中で $dF(q,\lambda)=0$ で定まるが，定義から F の q 方向の偏微分係数が消えているから，T は $T_{(q,\lambda)}\mathbf{R}^k \times \{\lambda\}$ を含む．いま，$\pi':\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$ を第２成分への射影とすると，したがって，$\pi'_*(T)$ は $T_\lambda \mathbf{R}^{n+1}$ の超平面 (接触要素) である．このとき，$L_F:(\Sigma(F),0) \to PT^*\mathbf{R}^{n+1}$ を各 $(q,\lambda) \in \Sigma(F)$ に対して，

$$L_F(q,\lambda) = \left([\frac{\partial F}{\partial q_1}:\cdots:\frac{\partial F}{\partial q_{n+1}}],\lambda\right)$$

で定義する．この際，$L_F(q,\lambda)$ の第１成分について，

$$[\frac{\partial F}{\partial x_1}:\cdots:\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}] \in PT^*_\lambda \mathbf{R}^{n+1}$$

と考えていることに注意する．ただし，$PT^*_\lambda\mathbf{R}^{n+1}$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ の $\lambda \in \mathbf{R}^{n+1}$ における余接ベクトル空間 $T^*_\lambda\mathbf{R}^{n+1}$ の射影化であり，n 次元射影空間である．

$PT^*\mathbf{R}^{n+1}$ の接触構造は，$c \in PT^*\mathbf{R}^{n+1}$ について，$D_c = \pi_*^{-1}(c)$ で定まっていた．

補題 2.23 $L_F:(\Sigma(F),0) \to PT^*\mathbf{R}^{n+1}$ はルジャンドルはめ込み芽である．

例 2.24 (**超曲面族の包絡面**) $\mathbf{R}^{n+1}$ の超曲面族 $F(x,t)=0$ を考える．ここで，$x \in \mathbf{R}^{n+1}$ であり，$t \in \mathbf{R}^k$ はパラメーターである．この超曲面族の包絡面は古典的定義により，

$$F = \frac{\partial F}{\partial t_1} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial t_k} = 0$$

から，t を消去してえられる．すなわち，包絡面は $F(x,t)=0$ がモース族のとき，その定めるルジャンドル部分多様体の波面ととらえられる．ただし，その場合 t を内部変数とみなし，x をパラメーターと考えることに注意する．

定理 2.25 標準的接触形式 $\alpha = dy - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ の与えられた $\mathbf{R}^{2n+1}$ の，任意のルジャンドル部分多様体芽 $(L,0) \subset (\mathbf{R}^{2n+1},0)$ に対して，あるモース超曲面族 $F=0,\ F:(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n+1},0) \to (\mathbf{R},0)$, $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_{n+1}} \neq 0,$ があって，L はルジャンドルはめこみ $L_F:(\Sigma(F),0) \to \mathbf{R}^{2n+1}$ による像として表される．

このとき，関数族 F をルジャンドル部分多様体芽 L の**母関数族**，あるいは，ラグランジュの場合と区別するために**ルジャンドル母関数族**とよぶ．

２つの関数族 $F,G:(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n+1},0) \to (\mathbf{R},0)$ が $\mathcal{K}$-**同値**であるとは，微分同相芽 $\Phi:(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n+1},0) \to (\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n+1},0)$ で $\Phi(q,\lambda) = (\Psi(q,\lambda),\varphi(\lambda))$ の形のものと，関数芽 $\rho:(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n+1},0) \to \mathbf{R}$ で $\rho(0,0) \neq 0$ であるものがあって，

$$G(q,\lambda) = \rho(q,\lambda)F(\Phi(q,\lambda))$$

のときにいう．

いいかえれば，パラメーターの変換と，各パラメーターごとの変数変換により，各超曲面 $F(\cdot,\lambda)=0$ と $G(\cdot,\lambda)=0$ が写りあうときに $\mathcal{K}$-同値とよぶわけである．ここで，0 にならない関数を定義式にかけても同じ超曲面を定めることに注意する．

上の状況で，$(q,\lambda)\in V(G)$ と $\Phi(q,\lambda)\in V(F)$ は同じ条件であるから，$\Phi(V(G))=V(F)$ である．Φ の形の制限から，$\Phi(\Sigma(G))=\Sigma(F)$ となり，$\tilde{\varphi}\circ L_G=L_F\circ\Phi$ となる．ここで，$\tilde{\varphi}$ は φ のルジャンドルリフトである．とくに，L_F と L_G はルジャンドル同値である．

一般に $F:(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{n+1},0)\to(\mathbf{R},0)$ と $G:(\mathbf{R}^\ell\times\mathbf{R}^{n+1},0)\to(\mathbf{R},0)$, について，$F$ と G が**安定** $\mathcal{K}$-**同値**であるとは，付加的な内部変数に関する非退化 2 次形式 $Q(q''),q''\in\mathbf{R}^{k'}$ および $R(q'''),q'''\in\mathbf{R}^{\ell'}$ があって

$$F+Q:(\mathbf{R}^{k+k'}\times\mathbf{R}^{n+1},0)\to(\mathbf{R},0)$$

と

$$G+R:(\mathbf{R}^{\ell+\ell'}\times\mathbf{R}^{n+1},0)\to(\mathbf{R},0)$$

が $\mathcal{K}$-同値のときにいう．

F と $F+Q$ について $\Sigma(F+Q)=\Sigma(F)\times 0$ であり，L_{F+Q} は包含写像 $\Sigma(F)\hookrightarrow\Sigma(F)\times 0$ を通して L_F と同一視される．

ルジャンドル部分多様体のルジャンドル同値による局所的分類は，母関数族の $\mathcal{K}$-同値による分類に帰着される．

定理 2.26 (**ルジャンドル特異点論の基本定理**) F と F' をそれぞれモース超曲面族とする．このとき，それらの定めるルジャンドルはめ込み L_F と $L_{F'}$ がルジャンドル同値であるための必要十分条件は，F と F' が安定 $\mathcal{K}$ 同値であることである．

とくに，$PT^*\mathbf{R}^{n+1}$ の 2 つのルジャンドル部分多様体芽がルジャンドル同値であるための必要十分条件は，それらの母関数族が安定 $\mathcal{K}$-同値であることである．

2.8 ルジャンドル特異点と波面の分類

ルジャンドル特異点に対しても，安定性，単純性が，ラグランジュ特異点の場合と同様に定義される．

定理 2.27 $\dim N=n,\dim A=n+1$ とし，$f:(N,u_0)\to PT^*A$ をルジャンドルはめ込み芽とする．このとき，f がルジャンドル安定であるための必要十分条件は，f が母関数族が $\mathcal{K}$-バーサルであることである．

f がルジャンドル安定であることは，その母関数族

$$F:(\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{n+1},0)\to(\mathbf{R},0)$$

が K-バーサルなことである．f が単純であるということは，F に現われる K-同値類が有限個であることを意味する．

定理 2.28 すべての単純安定ルジャンドルはめ込み芽 $f:(\mathbf{R}^n,0)\to PT^*\mathbf{R}^{n+1}$ は，下のリストにあるいずれかの関数 S について

$$F(p_I;x_J,y)=y-\sum_{i\in I}p_ix_i+S(p_I,x_J)$$

とおくとき，ルジャンドルはめ込み $L_F:(\mathbf{R}^n,0)\to\mathbf{R}^{2n+1}$,

$$L_F(p_I,x_J)=(\frac{\partial S}{\partial p_I},\ x_J,\ p_I\frac{\partial S}{\partial p_I}-S\ p_I,\ -\frac{\partial S}{\partial x_J})$$

にルジャンドル同値である．
$S=S(p_I,x_J)$ のリスト

$$S=\pm p_1^{m+1}+x_{m-1}p_1^{m-1}+\cdots+x_2p_1^2$$
$$(I=\{1\},1\le m\le n+1)\quad A_m\text{型特異点.}$$

$$S=\pm p_1^2p_2\pm p_2^{m-1}+x_{m-1}p_2^{m-2}+\cdots+x_3p_2^2$$
$$(I=\{1,2\},4\le m\le n+1)\quad D_m\text{型特異点.}$$

$$S=\pm p_1^3\pm p_2^4+x_5p_1p_2^2+x_4p_1p_2+x_3p_2^2$$
$$(I=\{1,2\},5\le n)\quad E_6\text{型特異点.}$$

$$S=\pm p_1^3\pm p_1p_2^3+x_6p_1p_2^2+x_5p_1p_2+x_4p_2^3+x_3p_2^2$$
$$(I=\{1,2\},6\le n)\quad E_7\text{型特異点.}$$

$$S=\pm p_1^3\pm p_2^5+x_7p_1p_2^3+x_6p_1p_2^2+x_5p_1p_2+x_4p_2^3+x_3p_2^2$$
$$(I=\{1,2\},7\le n)\quad E_8\text{型特異点.}$$

単純ルジャンドル特異点の記号を用いると，次の特異点のみを持つことはジェネリックな性質である：
$n=1$ のとき，A_2 型特異点,
$n=2$ のとき，A_2,A_3 型特異点,
$n=3$ のとき，A_2,A_3,A_4,D_4 型特異点,
$n=4$ のとき，A_2,A_3,A_4,A_5,D_4,D_5 型特異点,
$n=5$ のとき，$A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,D_4,D_5,D_6,E_6$ 型特異点.
ルジャンドル部分多様体の波面はその母関数族の特異集合のパラメーター方向への射影である．上のリストにある関数族を解析して，波面の性質を調べることができる．たとえば，$n+1=3$ の場合には，A_2-型特異点と A_3-型特異点が現われる．たまたまそれらは，それぞれ A_3-型ラグランジュ特異点と A_4-型ラグランジュ特異点のコースティックと同じになるが，D^4-型ラグランジュ特異点は，ルジャンドル特異点の３次元空間内の波面としては現われない．一般には，波面とコースティックには異なる特異点が現われることに注意されたい.

3　障害回折問題と特異点論

１変数多項式の空間 $P_k=\{x^{k+1}+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k\}$ を考える．P_k の中で，$F(x)=0$ が少なくとも $\ell+1$ 重根を持つもの全体を Σ_ℓ と表すと，フィルトレーション $P_k\supset\Sigma_1\supset\Sigma_2\supset\cdots$ が得られる．とくに Σ_1 を k 次元スワローテイル (燕尾, swallowtail) と呼ぶ．また，P_{2k} 内の Σ_k つまり 少なくとも $k+1$ 重根をもつもの全体を k 次元オープン・スワローテイル (開燕尾, open swallowtail) とよぶ．この特異点が回折問題で現れる．(レジメを作る時間がありませんでした．すみません).

4　光学的ラグランジュ・ルジャンドル特異点に関係する話題

Nye の定理があるが，時間があれば，説明したいと考えている．(レジメを作る時間がありませんでした．すみません).

5 付録：可微分写像の特異点に関係する基本的概念・用語の解説

多様体 M から多様体 N への可微分写像 $f : M \to N$ (簡単のため C^∞ 級とする)．われわれは，M がシンプレクティック多様体内のラグランジュ部分多様体で，N がラグランジュ・ファイブレーションの底空間の場合を扱うのだが，ここでは一般的な状況での言葉使いを説明したい．

各点 $x_0 \in M$ に対して，x_0 における M の接空間 (接ベクトル空間) を $T_{x_0}M$ で表す．x_0 における f の **微分写像** あるいは **線形化** $(f_*)_{x_0} : T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N$ とよばれる線形写像が定まる．その階数を $\mathrm{rank}(f_*)_{x_0}$ で表す．

用語 **特異点** (singular point) と**臨界点** (critical point) の違い．**非特異点** (non-singular point) と**正則点** (regular point) の違い．**特異値** (singular value) と **臨界値** (critical value) の違い．**非特異値** (non-singular value) と**正則値** (regular value) の違い．

$$x_0 \in M \text{ が } f : M \to N \text{ の特異点} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{rank}(f_*)_{x_0} < \min\{\dim M, \dim N\} \Leftrightarrow (f_*)_{x_0} \text{ が全射でも単射でもない.}$$

$$x_0 \in M \text{ が } f : M \to N \text{ の臨界点} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{rank}(f_*)_{x_0} < \dim N \Leftrightarrow (f_*)_{x_0} \text{ が全射でない.}$$

$$y_0 \in N \text{ が } f : M \to N \text{ の特異値} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists x_0 \in f^{-1}(y_0); x_0 \text{ は } f \text{ の特異点.}$$

$$y_0 \in N \text{ が } f : M \to N \text{ の臨界値} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists x_0 \in f^{-1}(y_0); x_0 \text{ は } f \text{ の臨界点.}$$

特異でない場合，非特異という．臨界でない場合，正則という：

$$x_0 \in M \text{ が } f : M \to N \text{ の非特異点} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{rank}(f_*)_{x_0} = \min\{\dim M, \dim N\} \Leftrightarrow (f_*)_{x_0} \text{ が全射か，または単射である.}$$

$$x_0 \in M \text{ が } f : M \to N \text{ の正則点} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{rank}(f_*)_{x_0} = \dim N \Leftrightarrow (f_*)_{x_0} \text{ が全射である.}$$

$$y_0 \in N \text{ が } f : M \to N \text{ の非特異値} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x_0 \in f^{-1}(y_0); x_0 \text{ は } f \text{ の非特異点.}$$

$$y_0 \in N \text{ が } f : M \to N \text{ の正則値} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x_0 \in f^{-1}(y_0); x_0 \text{ は } f \text{ の正則点.}$$

$$x_0 \in N \text{ で } f : M \to N \text{ がはめ込み (immersion)} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{rank}(f_*)_{x_0} = \dim M \Leftrightarrow (f_*)_{x_0} \text{ が単射.}$$

$$x_0 \in N \text{ で } f : M \to N \text{ がしずめ込み (submersion)} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{rank}(f_*)_{x_0} = \dim N \Leftrightarrow (f_*)_{x_0} \text{ が全射.}$$

例 5.1 ファイブレーション $\pi : T^*\Lambda \to \Lambda$ を考える．ラグランジュ部分多様体 $L \subset T^*\Lambda$ に対して， $f := \pi|_L : L \to \mathbf{R}^n$ の特異点は，その点での L の接空間が，ファイバー方向を有するような点である．この場合は，特異点といっても，臨界点とよんでも同じことである．

6 付録：シンプレクティック幾何

6.1 シンプレクティック多様体

$(M\omega)$ をシンプレクティック多様体とする．

M を可微分多様体とする．M 上の非退化可微分閉 2 形式を M 上の**シンプレクティック形式**とよぶ．すなわち，ω がシンプレクティック形式とは，ω が M 上の可微分 2 形式であり，$d\omega = 0$ であり，ω が非退化，すなわち，各点 $x \in M$ について，交代双線形写像 $\omega(x) : T_xM \times T_xM \to \mathbf{R}$ が正則であることをいう．M の次元は偶数である．

可微分多様体 M とその上のシンプレクティック形式 ω の組 (M, ω)，あるいは単に M を**シンプレクティック多様体**とよぶ．

Λ を n 次元可微分多様体とする．そして，$T^*\Lambda$ を Λ の余接バンドルの全空間とする．$T^*\Lambda$ は $2n$ 次元可微分多様体であり，自然なファイブレーション $\pi : T^*\Lambda \to \Lambda$ がある．

さて，$T^*\Lambda$ にシンプレクティック形式を定義しよう．そのために $T^*\Lambda$ 上に**リュウビル形式**とよばれる可微分 1 形式 θ を，$\xi \in T_x^*\Lambda$ に対し，$\pi_* : T_\xi T^*\Lambda \to T_x\Lambda$ を π の微分写像としたとき，各 $v \in T_\xi T^*\Lambda$ について，

$$\langle \theta, v \rangle = \langle \xi, \pi_* v \rangle$$

で定義する．ただし，$\langle\ ,\ \rangle$ は余接ベクトルと接ベクトルの自然なペアリングを表す：$\langle \alpha, v \rangle = \alpha(v)$.

Λ を n 次元多様体とし，α を Λ 上の 1 形式とする．α を可微分写像 $\alpha : \Lambda \to T^*\Lambda$ とみなす．いま，$T^*\Lambda$ 上のリュウビル 1 形式 θ を写像 α で引き戻すと Λ 上の 1 形式ができるが，これはもともとの α に一致する：$\alpha^*\theta = \alpha$. しかも，リュウビル形式はこの性質をもつ $T^*\Lambda$ 上の 1 形式として特徴付けられる．その意味でリュウビル形式はトートロジカル (tautological) である．

ω が非退化であるとい条件は,

$$\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n\ 個}$$

が M の各点で 0 でないという条件に言い換えられる．

例 6.1 $\mathbf{R}^{2n}$ の座標を $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ とする．このとき，

$$\omega_0 = dp_1 \wedge dx_1 + \cdots + dp_n \wedge dx_n$$

は $\mathbf{R}^{2n}$ 上のシンプレクティック形式である．この 2 形式の，点 $x \in \mathbf{R}^{2n}$ における接ベクトル $u, v \in T_x\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^{2n}$ での値は，それらの (p_i, x_i)-平面への射影の作る平行 4 辺形の (向きをこめた) 面積の総和

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_1' & v_1' \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} u_n & v_n \\ u_n' & v_n' \end{vmatrix}$$

に等しい．ここで，u_i, v_i は u, v の $\dfrac{\partial}{\partial p_i}$ の係数，u_i', v_i' は u, v の $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ の係数である．

この例は次の例で，$\Lambda = \mathbf{R}^n$ の場合に対応している．また，

$$\theta_0 = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

とおくと，$\omega_0 = d\theta_0$ となることに注意する．

例 6.2 Λ を n 次元可微分多様体とする．そして，$T^*\Lambda$ を Λ の余接バンドルの全空間とする．$T^*\Lambda$ は $2n$ 次元可微分多様体であり，自然なファイブレーション $\pi : T^*\Lambda \to \Lambda$ がある．

さて，$T^*\Lambda$ にシンプレクティック形式を定義しよう．そのために $T^*\Lambda$ 上に**リュウビル形式**とよばれる可微分 1 形式 θ を，$\xi \in T_x^*\Lambda$ に対し，$\pi_* : T_\xi T^*\Lambda \to T_x\Lambda$ を π の微分写像としたとき，各 $v \in T_\xi T^*\Lambda$ について，

$$\langle \theta, v \rangle = \langle \xi, \pi_* v \rangle$$

で定義する．ただし，$\langle\ ,\ \rangle$ は余接ベクトルと接ベクトルの自然なペアリングを表す：$\langle \alpha, v \rangle = \alpha(v)$.

Λ を n 次元多様体とし，α を Λ 上の 1 形式とする．α を可微分写像 $\alpha : \Lambda \to T^*\Lambda$ とみなす．いま，$T^*\Lambda$ 上のリュウビル 1 形式 θ を写像 α で引き戻すと Λ 上の 1 形式ができるが，これはもともとの α に一致する：$\alpha^*\theta = \alpha$. しかも，リュウビル形式はこの性質をもつ $T^*\Lambda$ 上の 1 形式として特徴付けられる．その意味でリュウビル形式はトートロジカル (tautological) である．

6.2 ダルブーの定理

$(M, \omega), (M', \omega')$ をシンプレクティック多様体とする．微分同相写像 $\sigma : M \to M'$ が $\sigma^*\omega' = \omega$ をみたすとき，σ を**シンプレクティック微分同相写像** (symplectic diffeomorphism, symplectomorphism) とよぶ．

定理 6.3 (**ダルブーの定理**) (M, ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体とする．すると，M の各点 x に対し，x の M における開近傍 U と $T^*\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{2n}$ の $\mathbf{0}$ の開近傍 V があって，$(U, \omega|_U)$ と $(V, d\theta|_V)$ はシンプレクティック微分同相である．ただし，θ は $T^*\mathbf{R}^n$ 上のリュウビル 1 形式である．

いいかえると，x のまわりの局所座標系 $p_1, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n$ がとれて，座標近傍上で $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx_i$ と表されることをダルブーの定理は意味している．

6.3 ラグランジュ部分多様体

(M,ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体，N を M の部分多様体とする．M の各点 x について，T_xN が T_xM のラグランジュ部分空間のとき，N を M の**ラグランジュ部分多様体**という．また，M の各点 x について，T_xN が T_xM のアイソトロピック部分空間 (あるいはコアイソトロピック) のとき，N を M の**アイソトロピック部分多様体** (あるいは**コアイソトロピック部分多様体**) という．

N がアイソトロピック部分多様体であるための条件は，ある多様体 N' からの埋め込み $i : N' \to M$ で，$i(N') = N$ であるものについて，引き戻した 2 形式 $i^*\omega = 0$ であることである．

N が $2n$ 次元シンプレクティック多様体 M のラグランジュ部分多様体である条件は，N が n 次元アイソトロピック部分多様体であることである．

シンプレクティック多様体 M への多様体 N' のはめ込み (うめ込み) $f : N' \to M$ について，f が**アイソトロピックはめ込み** (**アイソトロピックうめ込み**) であるとは，$f^*\omega = 0$ のときにいう．また，$\dim M = 2n$ で，$\dim N' = n$ のとき，アイソトロピックはめ込み (アイソトロピックうめ込み) を**ラグランジュはめ込み** (**ラグランジュうめ込み**) とよぶ．

例 6.4 Λ を n 次元多様体とし，α を Λ 上の閉 1 形式とする．α を可微分写像 $\alpha : \Lambda \to T^*\Lambda$ とみなすと，α はラグランジュうめ込みであり，$\alpha(\Lambda)$ はラグランジュ部分多様体である．実際，$\dim(\alpha(\Lambda)) = \dim(\Lambda) = n$ であり，また，$T^*\Lambda$ 上のリュウビル形式 θ について，$\alpha^*\theta = \alpha$ であるから，

$$\alpha^*\omega = \alpha^*(d\theta) = d\alpha^*\theta = d\alpha = 0$$

となるからである．

例 6.5 引き続き Λ を n 次元多様体とする．S を Λ の部分多様体とするとき，S の Λ における**余法バンドル**あるいは**コノーマルバンドル**が，

$$N^*S = \{\xi \in T^*\Lambda \mid \pi(\xi) = x \in S,\ \xi|_{T_xS} = 0\}$$

で定義される．すなわち，S 上の点 x について，x における M の余接空間 T_x^*M の元のうち，T_xS に属する接ベクトルは零にするような余接ベクトルを，(x を S 上動かして) すべて集めたものが N^*S である．このとき，次がなりたつ．

(1) N^*S は $T^*\Lambda$ の n 次元部分多様体である．

(2) $T^*\Lambda$ 上のリュウビル形式 θ は N^*S に制限すると消えている：$\theta|_{N^*S} = 0$.

(3) コノーマルバンドル N^*S は $T^*\Lambda$ のラグランジュ部分多様体である．

6.4 ラグランジュ・ファイブレーション

(M,ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体，Λ を n 次元多様体とする．ファイブレーション $\pi : M \to \Lambda$ の各ファイバー $\pi^{-1}(x), x \in \Lambda$ が M のラグランジュ部分多様体のとき，$\pi : M \to \Lambda$ を**ラグランジュ・ファイブレーション**という．

6.5 ハミルトンベクトル場

さて，$h : M \to \mathbf{R}$ を可微分関数とする．このとき dh は M 上の 1 形式である．すると，M 上のベクトル場 X_h が

$$i_{X_h}\omega = dh$$

すなわち，M の各点 x について，

$$\omega(X_h(x),\ v) = \langle dh, v\rangle, \quad v \in T_x^*M$$

により定まる．X_h を**ハミルトンベクトル場**，h をその**ハミルトン関数**とよぶ．

例 6.6 シンプレクティック多様体 $(\mathbf{R}^{2n}, \omega_0)$, $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx_i$ の場合，

$$X_h = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

となる．このことは，ω_0 により，$\dfrac{\partial}{\partial p_i}$ と $-dx_i$ が対応し，$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ と dp_i が対応することからわかる．

6.6 シンプレクティック簡約

(M,ω) を $2(n+k)$ 次元シンプレクティック多様体，Λ を M の $2n+k$ 次元コイソトロピック部分多様体とする．すると，

$$(T\Lambda)^s = \bigcup_{x\in\Lambda}(T_x\Lambda)^s \subset T\Lambda$$

はファイバーの次元が k の $T\Lambda$ の部分ベクトルバンドルである．$(T\Lambda)^s$ を**特性分布**とよぶ.

補題 6.7 $(T\Lambda)^s$ は完全積分可能である．

したがって，フロベニウスの定理より，Λ に k 次元葉層 $\mathcal{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ があり，各点 $x\in\Lambda$ に対し，x を通る (連結な) 葉を F とするとき，$(T_x\Lambda)^s = T_xF$ となる．この葉層 $\mathcal{F}$ を Λ の**特性葉層**とよぶ.

定理 6.8 M' を $2n$ 次元多様体，$\pi:\Lambda\to M'$ を全射沈め込みで，各ファイバーが Λ の特性葉層 $\mathcal{F}$ の葉になっているとする．このとき，M' 上にシンプレクティック形式 ω' で，$\pi^*\omega=\omega|_\Lambda$ をみたすものがただ一つある．$(M'\omega')$ を (M,ω) の Λ による**シンプレクティック簡約**とよぶ.

6.7 リーマン多様体と測地流

M を多様体とし，各点 $x\in M$ の接ベクトル空間 T_xM に正値計量 (内積) $g(x):T_xM\times T_xM$ が与えられているとする．局所表示に関し，$g(x)(\dfrac{\partial}{\partial x_i},\dfrac{\partial}{\partial x_i})=g_{ij}(x)$ が座標近傍で可微分のとき，g を M 上の**リーマン計量** とよび，リーマン計量の与えられた多様体を**リーマン多様体**とよぶ．(M,g) を n 次元リーマン多様体とする．計量 g はその非退化性から，各点 $x\in M$ に対して，同型 $T_xM\cong T_x^*M$,

$$v\in T_xM\mapsto g(x)(v,\cdot\,)=v^*\in T_x^*M$$

を与える．局所座標系では，$g_{ij}=g(\dfrac{\partial}{\partial x_i},\dfrac{\partial}{\partial x_j})$ とおくとき，$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ に対し，$\sum_{j=1}^n g_{ij}dx_j$ が対応する．一般に，

$$v=a_1\frac{\partial}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+a_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

に対し，

$$v^*=\sum_{1\le i,j\le n}a_ig_{ij}dx_j$$

が対応する．逆に，dx_j に対しては $\sum_i g^{ij}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ が対応することに注意する．ただし，$g^{ij}=g^{ji}$ は対称行列 (g_{ij}) の逆行列の (i,j) 成分である．さて，上の同型に関して T_x^*M に計量が誘導されるが，そのとき，

$$(dx_i,dx_j)=g^{ij}$$

がなりたつ．余接ベクトル $\xi=\sum b_idx_i$ について，

$$\|\xi\|^2=(\xi,\xi)=\sum g^{ij}b_ib_j$$

となる．

いま，ハミルトン関数として**エネルギー関数** $h:T^*M\to\mathbf{R}$ をとろう．すなわち，$\xi\in T_x^*M$ に対し，

$$h(\xi)=\frac{1}{2}\|\xi\|^2$$

で定義する．あきらかに h は可微分である．この h からきまるハミルトンベクトル場 X_h の定める T^*M 上の (局所的) 流れ Φ_t を TM 上の (局所的) 流れと思ったとき，これを**測地流**とよぶ.

7　付録：接触幾何

7.1　接触多様体

W を多様体，K を TW の余次元 1 の部分ベクトルバンドルとする．局所的に 1 形式 α をつかって，$K = \{\alpha = 0\}$ と表したとき，α の外微分 $d\alpha$ が K 上非退化であれば，K を W の上の**接触構造**とよぶ．また，α を**接触形式**という．組 (W, K) を**接触多様体**という．

ここで，$d\alpha$ が K 上非退化という条件は，各点 $c \in W$ について，交代双線形形式 $d\alpha(c) : K_c \times K_c \to \mathbf{R}$ が正則であることである．したがって，各 $K_c \subset T_cW$ の次元は偶数である．また余次元は 1 であるから，W の次元は奇数である．W の次元を $2n+1$ とするとき，α が接触形式であるという条件は，いいかえると，

$$\alpha \wedge \underbrace{d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha}_{n\ 個}$$

が各点で 0 でないということである．

例 7.1 $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{2n+1}$ の座標を $p_1, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n, r$ とする．ただし，$x_1, \ldots, x_n$ は $\mathbf{R}^n$ の座標で，p_j は 1 階偏微分に，r は関数値に対応する座標である．$\alpha = dy - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ とおくと，α は $\mathbf{R}^{2n+1}$ 上の接触形式である．これを**標準接触形式**とよぶ．

例 7.2 A を $n+1$ 次元多様体とする．その余接バンドル T^*A からその零切断をとりのぞき，0 でないスカラー倍を同一視してできる $2n+1$ 次元多様体 PT^*A を A の**接触要素の作る多様体**とよぶ．この多様体は自然に (tautological に) 接触構造をもつ．

射影 $\pi : PT^*A \to A$ はファイバーが n 次元射影空間であるようなファイブレーションである．さて，PT^*A の接触構造 K を定めよう．$c \in PT^*A$ に対し，c は $\pi(c) \in A$ における接触要素であることに注目し，$K_c = \pi_*^{-1}(c)$ とおく．ここで，$\pi_* : T_c(PT^*A) \to T_\pi(c)$ は微分写像である．この接触構造を**標準的接触構造**とよぶ．

局所座標系で接触構造を記述しよう．$\psi = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ を座標近傍 $U \subset Z$ 上の局所座標系とする．対応する T^*U 上の正準座標系を

$$\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}; x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$$

とする．すると，$PT^*A \cap \pi^{-1}(U)$ の点は $\mathbf{R}P^n \times \psi(U)$ の点

$$([\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}], x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$$

で記述される．たとえば，$V = PT^*A \cap \pi^{-1}(U) \cap \{\xi_{n+1} \neq 0\}$ では，$\xi_i/\xi_{n+1} = -p_i, 1 \leq i \leq n$ とおけば，$p_1, \ldots, p_n; x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ が局所座標系となる．このとき，

$$\alpha = dx_{n+1} - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$$

とおけば，この局所座標近傍 V 上で $K = \{\alpha = 0\}$ と表される．実際，$c \in V$ について，$v \in T_c(PT^*A)$ をとると，$v \in K_c$ の条件は $\pi_* v$ が c の定める接触要素に含まれることである．ところが，c の定める接触要素は $\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i dx_i = 0$ すなわち，$-\sum_{i=1}^n p_i dx_i + dx_{n+1} = 0$ であり，これが，K_c を定めるからである．

7.2　シンプレクティック化

W を接触形式 α が与えられた接触多様体とする．$M = W \times \mathbf{R}$ とおく．$\mathbf{R}$ 上の座標を λ とする．M 上の微分 1 形式 $\lambda\alpha$ を考え，$\omega = d(\lambda\alpha)$ とおく．

命題 7.3 $\omega = d\lambda \wedge \alpha + \lambda\alpha$ は M 上のシンプレクティック形式である．

上の命題 7.3 で得られたシンプレクティック多様体 (M, ω) を接触多様体 W の**シンプレクティック化**とよぶ．

7.3　ダルブーの定理

$(W,K),(W',K')$ を接触多様体とする．微分同相 $\sigma : W \to W'$ が各点 $c \in W$ について $\sigma_*(K_c) = K'_{\sigma(c)}$ をみたすとき σ は**接触微分同相写像** (contact diffeomorphism, contactomorphism) であるという．このとき，(W,K) と (W',K') は**接触微分同相** (contact diffeomorphic, contactomorphic) であるという．

シンプレクティック多様体の場合と同様に，接触多様体も局所的には標準的なモデルと接触微分同相である：

定理 7.4 (**接触多様体に関するダルブーの定理**) (W,K) を $2n+1$ 次元接触多様体とする．各点 $c \in W$ に対し，c の開近傍 U と $\mathbf{R}^{2n+1}$ の 0 の開近傍 V があって，U と V は接触微分同相である．ただし，$\mathbf{R}^{2n+1}$ の接触構造は例 *2.8* のように接触形式 $dy - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$ で定めたものである．

7.4　ルジャンドル部分多様体

(W,K) を $2n+1$ 次元接触多様体，Λ を W の部分多様体とする．Λ が (W,K) の**積分多様体**とは，各点 $c \in \Lambda$ に対して，$T_c\Lambda \subset K_c$ となるときにいう．このとき，局所的に K をさだめる接触形式 α について，$\alpha|_\Lambda = 0$ であるから，$(d\alpha)|_\Lambda = d(\alpha|_\Lambda) = 0$ したがって，K_c 上のシンプレクティック形式 $d\alpha(c) : K_c \times K_c \to \mathbf{R}$ について，$T_c\Lambda$ はアイソトロピック部分空間である．よって，$\dim \Lambda \leq n$ がわかる．

$2n+1$ 次元接触多様体の n 次元積分多様体を**ルジャンドル部分多様体**とよぶ．

例 7.5 Λ を n 次元多様体とする．関数 $f : \Lambda \to \mathbf{R}$ に対し，1-ジェット展開 $j^1 f : \Lambda \to J^1(\Lambda, \mathbf{R})$ は埋め込みで，$j^1 f(\Lambda)$ は $J^1(\Lambda, \mathbf{R})$ のルジャンドル部分多様体である．

局所座標では，$j^1 f(\Lambda)$ は

$$p_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, p_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x), y = f(x)$$

と表される．

例 7.6 A を $n+1$ 次元多様体とし，$S \subset A$ を部分多様体とする．このとき，A における S の**射影余法バンドル**を

$$PN^*S = \{c \in PT^*A \mid \pi(c) \in \Lambda, T_{\pi(c)}S \subset c(\subset T_{\pi(c)}A)\}$$

で定義する．すると，PN^*S は PT^*A のルジャンドル部分多様体である．

7.5　ルジャンドル・ファイブレーション

W を $2n+1$ 次元接触多様体，A を $n+1$ 次元多様体とする．ファイブレーション $\pi : W \to A$ が**ルジャンドル・ファイブレーション**であるとは，各ファイバー $\pi^{-1}(z), z \in A$ が W のルジャンドル部分多様体であるときにいう．

例 7.7 例 2.8 の接触多様体 $(\mathbf{R}^{2n+1}, K)$，ただし，

$$K = \{dy - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = 0\}$$

について，ファイブレーション $\pi_{\mathrm{st}} : \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}^n$，$\pi(x,y,p) = (x,y)$ はルジャンドル・ファイブレーションである．

例 7.8 例 2.9 のファイブレーション $\pi : PT^*A \to A$ はルジャンドル・ファイブレーションである．

7.6　接触ハミルトンベクトル場

(W,K) を $2n+1$ 次元接触多様体とする．W 上のベクトル場 v を考えよう．各点の開近傍 U 上で K を定める接触形式 α をとったときに，リー微分 $L_v\alpha$ が U 上 α の関数倍，すなわち，U 上の可微分関数 λ があって，$L_v\alpha = \lambda\alpha$ をみたすとき，v を (W,K) の**接触ベクトル場**とよぶ．いいかえると，v の生成する (局所) 流れ Φ_t が接触微分同相であるようなベクトル場のことである．

以下簡単のため，W 上で K を定める接触形式 α がとれるとし，その接触形式 α を固定する．$H: W \to \mathbf{R}$ を可微分関数とする．このとき，W 上の接触ベクトル場 v で，条件 $\langle \alpha, v\rangle (= i_v\alpha) = H$ をみたすものがただ１つとれる．このベクトル場を**接触ハミルトンベクトル場**とよび，X_H とあらわし，H を X_H の**ハミルトン関数**とよぶ．

接触ハミルトンベクトル場がどのような形に一意的に定まるかを，局所表示で調べてみよう．

局所座標で，$\alpha = dy - \sum_i p_i dx_i$ と表されている場合を考えよう．

$$v = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c\frac{\partial}{\partial r}$$

とおく．$L_v\alpha = di_v\alpha + i_v d\alpha$ であるが，$i_v\alpha = \langle \alpha, v\rangle = H$ であるから，$di_v\alpha = dH$ である．また，$d\alpha = -\sum_i dp_i \wedge dx_i$ であるから，$i_v d\alpha = -\sum_i a_i dx_i + \sum_i b_i dp_i$ である．そこで,

$$dH - \sum_i a_i dx_i + \sum_i b_i dp_i = \lambda(dy - \sum_i p_i dx_i)$$

とおいてみよう．この等式をみたす可微分関数 λ があることが v の必要条件である．これから,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} + b_i = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} - a_i = -\lambda p_i, \quad \frac{\partial H}{\partial r} = \lambda,$$

よって,

$$a_i = \frac{\partial H}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial H}{\partial r}, \quad b_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i},$$

ときまる．ひるがえって，条件 $\langle \alpha, v\rangle = H$ から,

$$c - \sum_i p_i b_i = H$$

でなければならなかったから，結局

$$X_H = \sum_{i=1}^n (\frac{\partial H}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial H}{\partial r})\frac{\partial}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + (H - \sum_{i=1}^n p_i\frac{\partial H}{\partial p_i})\frac{\partial}{\partial r}$$

と１通りに定まってしまう．逆にこのベクトル場が条件をみたしていることは明らかである．X_H の局所的な存在と一意性から，X_H が大域的に，局所表示によらずに定まることもわかる．

8　付録：カタストロフ理論について

ルネ・トムが「カタストロフ理論」を提唱してから３０年あまりの月日が経った．若い方の中には，カタストロフ理論という名前を聞いたことがない人もおられると予想する．この講演を準備するにあたり，トムの代表的著書「構造安定性と形態形成」[18] をもう一度読み返してみた．いまなお刺激的でおもしろい本である．

カタストロフ理論とは何か．一言で説明するのはもちろん難しいが，あえて言うと,「対象の状態空間における分岐集合の特異性を調べることにより，局所的形態形成を研究する方法・視点」である．したがって，**カタストロフ理論は局所理論**であり，**形に関する理論**であり，その最も基本になる概念・対象は「**分岐集合**」である．分岐集合は「カタストロフ集合」ともよばれる．どんな状況でも，分岐集合は何か，と問うてみること，それがカタストロフ理論の精神の具現であろう．[1]

[1]例．たとえば，多項式関数 $y = f(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ を決める状態空間は $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ の全体 $\mathbf{R}^5$ である．$y = f(x)$ の勾配 $f'(x)$ に注目して分岐集合を調べると，それは $\mathbf{R}^5$ 内の超曲面であることがわかる．その超曲面にはどのような特異点があるか，特異点のまわりで，勾配の「ありよう」がどのように変わるか，と問うことは，微分という概念が生まれた瞬間 (あるいはそれ以前) からあった問題意識であろう．しかし，肝心の「どのような」「どのように」ということを認識し，それをおおやけに説明することは，たやすいことではない．たとえば,「形」に関して，明らかに現在でも (現在の方が？) われわれはボキャブラリー不足である．アーノルドの言葉では,「A_4」という名前がついているが...

実代数幾何，たとえばヒルベルト第１６問題の研究 (実平面代数曲線の位相幾何) もカタストロフ理論と関わる．実代数的平面曲線の空間のなかで，分岐集合 (この場合，判別集合とよぶ) は特異曲線の全体からなる超曲面である．補集合の連結成分では，曲線の形態が一定である．したがって，位相形の総計は，補集合の連結成分の個数 (π_0) で評価できる．このことは，複素代数幾何で，超曲面の補集合の基本群 (π_1) の研究が重要であることの実での対応事項である．実際にトムは，カタストロフ理論にとっての実代数幾何の発展の必要性を述べている [18].

また，ヴァシリエフ不変量 (結び目や平面曲線の局所不変量) は，分岐集合の解析から生まれた．カタストロフ理論がなかったら，いまだ見つかっていなかったかもしれない.

さて，トムによれば，カタストロフ理論は，基本 (初等) カタストロフ理論と，一般カタストロフ理論に大きく分けられる．[2] この分類はトムの言葉で言う「静的モデル」と「代謝モデル」の違いに対応する．[3]

カタストロフ理論の基礎は，写像の特異点論であり，力学系の分岐理論である．基本カタストロフ理論は，極言すれば関数族の特異点論の応用[4] であり，関数の臨界点の分岐に基づくモデルを構築しようとする．写像の特異点論の基本概念であり，基本カタストロフ理論の基礎概念は構造安定性と開折のヴァーサリティー[5] である．

ラグランジュ・ルジャンドル特異点論は，そのうちの基本カタストロフ理論のある種の拡張，言うならば，**基本カタストロフ理論のシンプレクティック化および接触化**についてである．しかし，それらの拡張は，カタストロフ理論の生まれた時からすでにあった，と言える．実際，トムの著書の重要な部分に，ハミルトン力学や，波面の理論が関わっている．話は，どちらかというとアーノルドの意味のカタストロフ理論の範疇に入るが，現在あるアーノルド理論の一般化をめざしていて，また同時に，写像の特異点論のシンプレクティック化・接触化も視野に入れている．この一般化が今後どのように応用されるか，そこがもちろん重要なところだが，それは未知数である．しかし，数学としても十分おもしろいと思っている．

[2]あるいは，カタストロフ理論を，より大きく，ハード・カタストロフ理論とソフト・カタストロフ理論に分けることができるかもしれない．ハードはカタストロフ理論の基礎を扱い，ソフトは応用に注目する．上の分類は，ハード・カタストロフ理論の分類にあたる．

[3]この分類は凝り固まったものではない．つまり，基本カタストロフから一般カタストロフへどのように移行するか，という魅力的なテーマの研究も活発になされているからである．あるいは，それとは別に，カタストロフ理論を，トムのカタストロフ理論 (主に生物学，言語学への思弁的応用,「これがわかる」)[18][19]，ジーマンのカタストロフ理論 (広く社会科学等への思弁的応用,「これもわかる」)[21]，アーノルドのカタストロフ理論 (あくまで厳密な応用に限る,「これはわかる」)[4] に分けることもできるかもしれない．ただし，この場合も,「思弁的」「厳密」という区切りは "厳密には"できない．数学は常にモデルを通して現実に応用されることを思い出そう．その意味で，説明というものはすべて思弁的である．問題はその説明の基礎の部分が充実しているか，ということだろう．その際，見落としがちだが，トムの強調する「直感的素材の拡張」の重要性にも注目すべきかもしれない．[18] にあるように,「幾何学は成功した魔術である.」「魔術は成功する限りは，すべて幾何学ではなかろうか？」

[4]かつて一時期，関数族の特異点論は簡単だから，それを応用したカタストロフ理論もたいしたものではない，という批判があった．しかし，その批判は２つの点でずれていると思う．まず，理論は簡単であるべきである，簡単な理論を作ることこそがわれわれの目的である，ということは確かである．また，その応用が重要かどうかは，応用のさせ方，視点の独創性に関係する．要は「何をいかに理解するか」ということの方が大切なのだろう．微積分と線形代数を駆使するだけでも，世の中のかなりのことが理解できることを，われわれはよく知っている．

[5]「開折」は unfolding の訳である．folding の逆だから，折られているものの「開き」，ホッケの開きのように，退化した特異点の**見えない部分を白日のもとにさらす**，という意味であろう．また，その開折自体が同じ種類の対象ととらえられる場合に使用するとのことである．ちなみに，開折に数学的に似た概念に「変形」(deformation) があるが，もともとの対象を，複雑なものと考え，それをわかりやすいものにするというのが，開折の発想であり，もともとの対象をきれいなものと考え，それが歪んで形を変えるというのが，変型の発想であろう．したがって,「難 → 易」あるいは「陰 → 陽」が開折で,「整 → 実」あるいは「聖 → 俗」が変形という用語を使う場合の思い入れであると言うと言い過ぎであろうか．言い過ぎであろう．また，開折が「バーサル」(versal) であるとは，他のいろいろな開き方のすべての情報を含んだ開折であるという意味である．たとえると，ホッケの開き方のすべて，というビデオがあればそれはバーサルである．もちろんビデオのように１次元的なメディアではなく，より高次元のメディア (身近に良いたとえがないけれど) が必要なこともあろう．ともかく，バーサル開折がわかれば，それを調べることによって，その特異点のことが真に理解される．ちなみに，バーサルは transversal から生じたことばである．実際，versality は transversality と結び付けられることが多い．transversal に交われば，**少しの摂動では，はずれない**，安定である，ということが，ある程度納得していただけると思う．

参考文献

[1] V.I. Arnol'd, *Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities,* Funct. Anal. Appl. **6–4** (1972), 254–272.

[2] V.I. Arnol'd, *Singularities of Legendre varieties, of evolvents and of fronts at an obstacle,* Ergod. Th. & Dynam. Sys., **2** (1982), 301–309.

[3] V.I. Arnol'd, *Evolution of singularities of potential flows in collision-free media and the metamorphosis of cuastics in three-dimensional space,* Trudy Seminara imeni I.G.Petrovskogo, **8** (1982), 21–27. English transl., J. of Soviet Math., **32** (1986), 229–258.

[4] V.I. Arnol'd, *Catastroph Theory, 3rd ed.,* Springer, 1992. オリジナル (ロシア語版) からの日本語訳：V.I. アーノルド,「カタストロフ理論」, 蟹江幸博訳, 現代数学社, 1985.

[5] V.I. Arnol'd, *Singularities of Caustics and Wave Fronts,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

[6] V.I. Arnol'd, S.M. Gusein-Zade, A.N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps I,* Birkhäuser, 1985.

[7] I.A. Bogaevski, G. Ishikawa, *Simple stable Lagrange mappings of an open Whitney umbrella,* Preprint, 2000.

[8] A.B. Givental', *Singular Lagrangian varieties and their Lagrangian mappings,* Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Prob. Mat., (Contemporary Problems of Mathematics) **33**, VITINI, 1988, pp. 55–112. English transl.: J. Sov. Math., **52** (1990), 3246–3278.

[9] G. Ishikawa, *Symplectic and Lagrange stabilities of open Whitney umbrellas,* Invent. math., **126-2** (1996), 215–234.

[10] G. Ishikawa, *Determinacy, transversality and Lagrange stability,* Banach Center Publications, **50** (1999), 123–135.

[11] 泉屋周一, 石川剛郎,「応用特異点論」, 共立出版社, 1998.

[12] Janeczko, S.; Stewart, Ian *Symplectic singularities and optical diffraction.* Singularity theory and its applications, Part II (Coventry, 1988/1989), 220–255, Lecture Notes in Math., **1463**, Springer, Berlin, 1991.

[13] J.B. Keller, *Rays, waves and asymptotics,* Bull. Amer. Math. Soc., **84–5** (1978), 727–750.

[14] 野口広, 福田拓生,「初等カタストロフィー」, 共立全書 208, 共立出版, 1976.

[15] J.F. Nye, *Natural Focusing and Fine Structure of Light,* Instutute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1999.

[16] J.F. Nye, J.H. Hannay, *The orientaitions and distorsions of caustics in geometrical optics,* Opt. Acta, **31–1** (1984), 115–130.

[17] T. Poston, I. Stewart, *Catastrophe theory and its applications,* Pitman, 1978. 日本語訳：「カタストロフィー理論とその応用／基礎編」,「カタストロフィー理論とその応用／応用編」, 野口, 伊東, 戸川訳, サイエンス社.

[18] R. Thom, *Stabilité Structurelle et Morphogénèse, Essai d'une théorie générale des modéles,* Benjamin, 1972. 原書第２版からの日本語訳：R. トム,「構造安定性と形態形成」, 彌永昌吉, 宇敷重広訳, 岩波書店, 1980.

[19] R. Thom, *Mathematical Models of Morphogenesis,* Ellis Horwood Ltd., 1983.

[20] V.M. Zakalyukin, R.M. Roberts, *On stable singular Lagrangian varieties,* Funct. Anal. Appl. **26–3** (1992), 174–178.

[21] E.C. Zeeman, *Catastrophe theory,* Selected Papers, 1972–1977, Addison-Wesley, 1977.