

特異点論の地図

石川 剛郎 (北海道大学大学院理学研究院)

幾何学と特異点の出会い

Encounter with Mathematics

2016年(平成28年)3月12日(土) 13日(日)

於：中央大学 理工学部

Maps of Singularity Theories

(特異点論の地図)

Singularity Theories of Maps

(写像の特異点論)

I. 特異点論の地図. (特異点めぐり)

II. 写像の特異点論とその応用.

III. 特異点をもつ曲線と曲面.

特異点論の地図（全体図）の披露

本講演では、私見ながらも特異点論の地図を披露する。特に、曲線や曲面の微分幾何学において、特異点がどう現れ、どう扱われてきたかを概観する。幾何学と特異点のこれまでの数々の出会い・巡り会いを振り返って、いわば時空に地図を描き、幾何学における特異点（論）の意義を具体例を示しながら説明する。

(別ファイル)

【 特異点とは 】

そもそも特異点とは何か？

理論には適用できる対象・状況に限界がある。

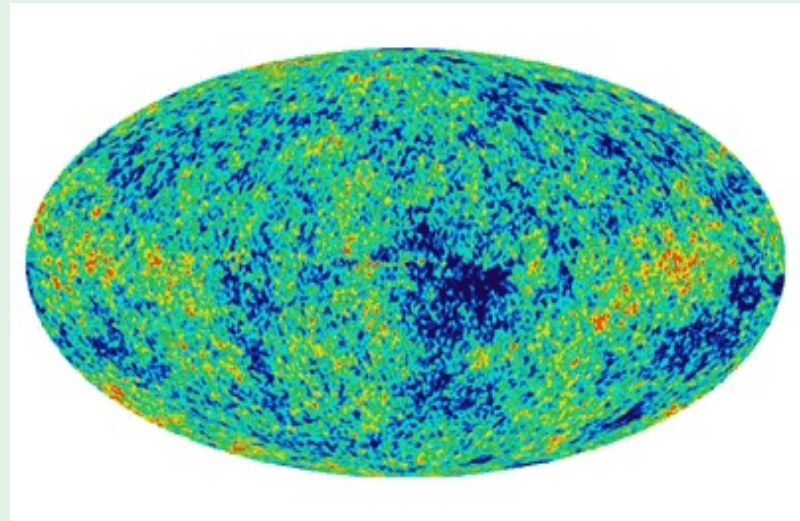
理論の境界点がある。

境界を超えると，理論は適用できなくなる。

そこには必然的に“特異点”が現れる。

適切に理論を修正し，枠組みを一新することで克服する。

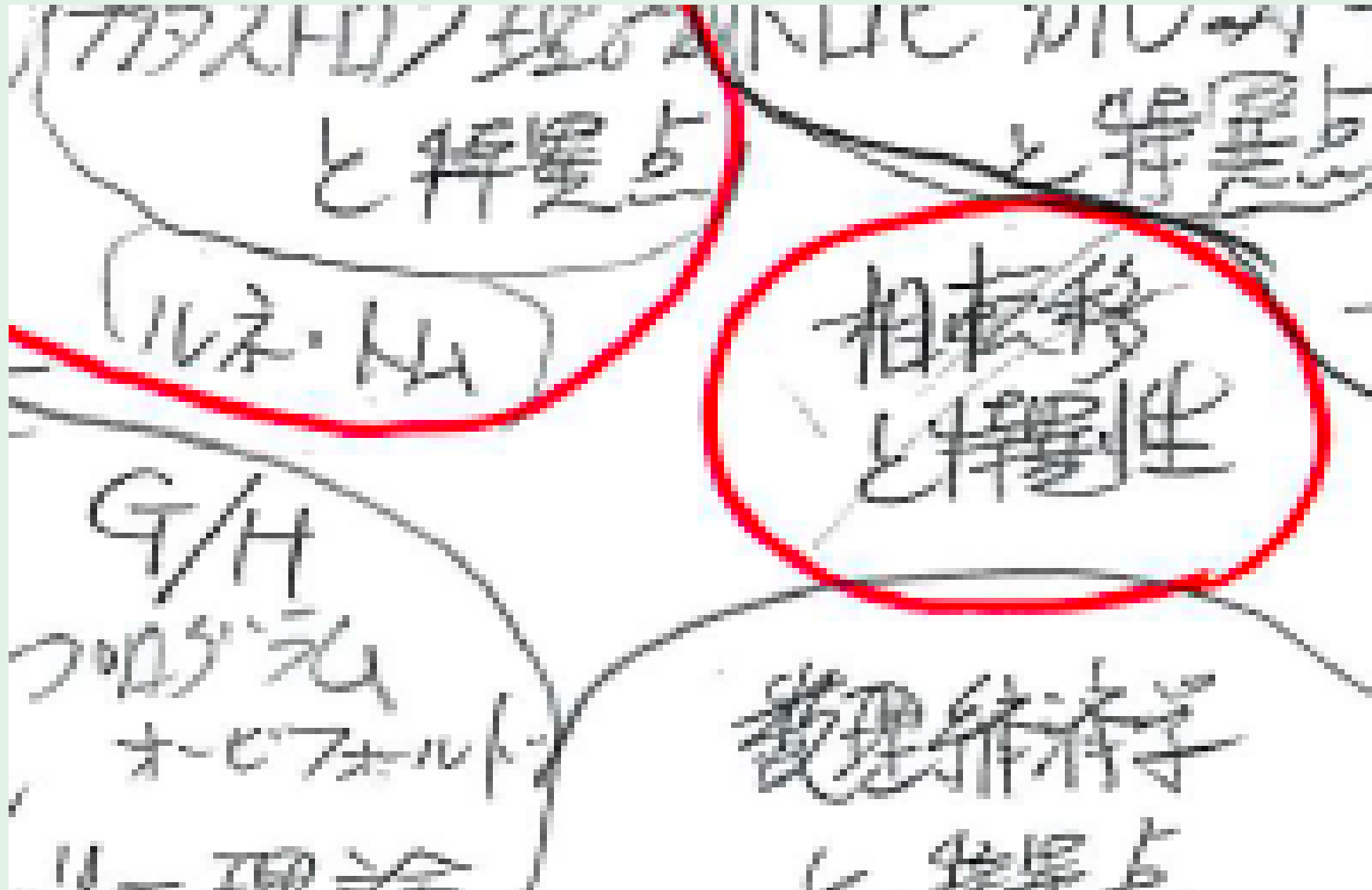
適用される範囲を拡げていくことで理論が発展する。



宇宙マイクロ背景輻射の全天分布 (提供：NASA/WMAP)

シンギュラリティ (技術的特異点)...

【特異点論の地図 (拡大図)】

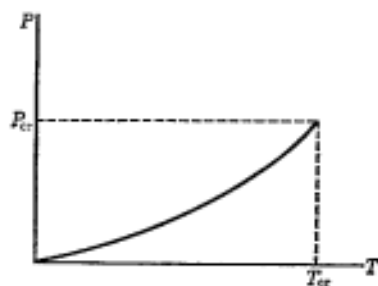


【相転移の臨界点】

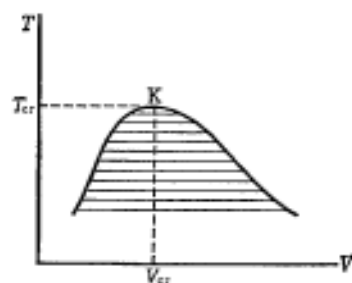
臨界点という概念をはじめて導入したのはメンデレーエフ (1834–1907) (1860 年, [ちなみに元素周期表の提唱は 1869 年]) である. (ランダウ・リフシッツ「統計物理学」第 3 版, 下, 小林他訳, 岩波書店, p.325)

§83 臨 界 点

相平衡の曲線 (P - T 平面における) は, ある点で終わることがある (第 16 図). このような点を臨界点といい, これに対応する温度と圧力をそれぞれ臨界温度, 臨界圧力という. 温度が T_{cr} より高いばあい, および圧力が P_{cr} より大きいば



第 16 図



第 17 図

あいには, 別々の相は存在せず, 物体はつねに均質である. 臨界点では両相間の差異は消失するということができる. **臨界点**という概念をはじめて導入したのはメンデレーエフ (Д. И. Менделеев, 1860) である.

T - V 座標では, 平衡図表は臨界点が存在するばあいには第 17 図に示したような様子をしている. 温度が臨界値に近づくにしたがって, 互いに平衡にある両相の比体積は接近し, 臨界点 (第 17 図の K) では両者は一致する. これと同じような様子は P - V 座標の図表にもみられる.

物質の全ての二つの状態の間に臨界点が存在するならば, 2 相への分離が決して起こらないような連続的転移をおこなわせることができる. — そのためには, 臨界点を迂回し, かつ平衡曲線とは決して交わらないような曲線に沿って, 状態を変えてゆけばよい. この意味では, 臨界点が存在するばあいには, 異なる相という概念そのものが形式的なものとなり, したがって, どの状態が一方

[ちなみに, メンデレーエフは, ウォッカの最適なアルコール度数が 40 度と主張したことでも有名. (ロシアの某数学者談).]

【カタストロフ理論】

折り目 (A_2) : x^3

カスプ (A_3) : $\pm x^4$

ツバメの尾 (A_4) : x^5

双曲的臍 (D_4^-) : $x^3 + y^3$

楕円の臍 (D_4^+) : $x^3 - xy^2$

蝶 (A_5) : $\pm x^6$

放物的臍 (D_5) : $x^2y + y^4$

ルネ・トム 「構造安定性と形態形成」 彌永 昌吉, 宇敷 重広 訳, 岩波書店 (1980).

野口 広, 福田拓生 「初等カタストロフィー」 共立出版 (1976).

V.I. アーノルド 「カタストロフ理論」 蟹江幸博 訳, 現代数学社 (1985).

【 カタストロフ理論と特異点 】

Encounter with Mathematics

第10回 応用特異点論 — 数学（厳密科学）としてのカタストロフ理論をめざして—

泉屋周一，石川剛郎，佐伯修

1999年2月5日（金）14：30～2月6日（土）17：00

於：東京都文京区春日1-13-27 中央大学 理工学部5号館

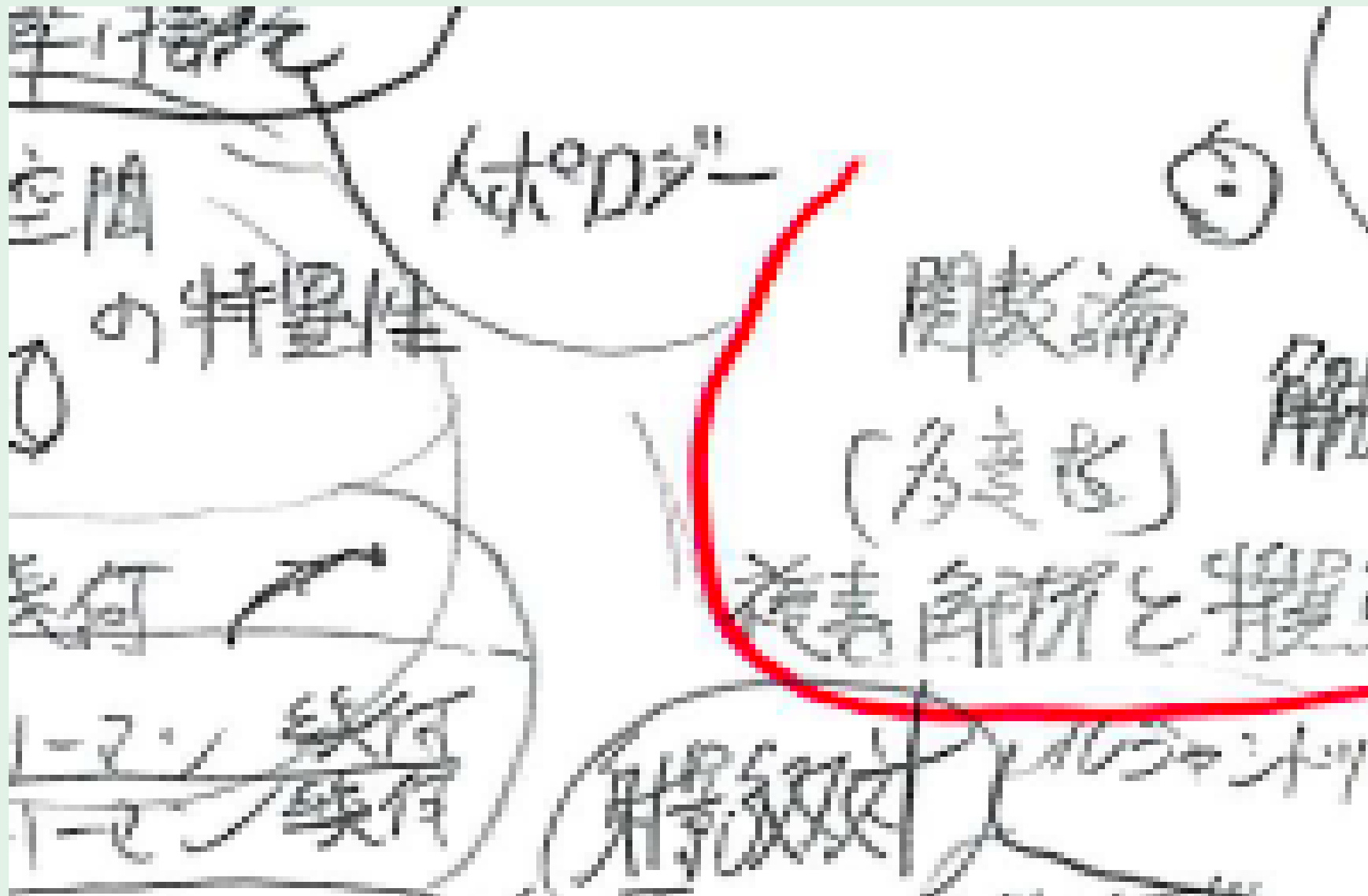
泉屋 周一，石川 剛郎「応用特異点論」共立出版 (1998).

写像の特異点論，ラグランジュ・ルジャンドル特異点，...

力学系，カオス理論，...

分岐集合の解析

【特異点論の地図 (拡大図)】



【 複素解析と特異点 】

Encounter with Mathematics

第 64 回 複素解析と特異点—留数が解き明かす特異点の魅力—

2016 年 2 月 20 日 (土), 2 月 21 日 (日)

講演者：諏訪立雄 (北大), 田島慎一 (筑波大), 鍋島克輔 (徳島大), 伊澤毅 (北海道科学大)

【 holomorphic 関数の臨界点 (特異点) 】

$U \subset \mathbb{C}^n$ 開領域, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphic 関数.

$p \in U$ が **臨界点** (特異点) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}(p) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(p) = 0.$$

別の意味の特異性もある. たとえば,

$p \in \bar{U}$ が “特異点” $\stackrel{\text{def}}{\iff} [\exists V, p \text{ の開近傍}, \exists g : V \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphic, s.t. } f = g \text{ on } U \cap V]$ でない.

これは**解析接続の特異性**: この種の特異性も, 写像の特異性として捉えられる場合がある.

例: $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$. $\{w^2 - z = 0\}$.

【 ピカール・レフシェッツ理論 】

Émile Picard (1856–1941)

Solomon Lefschetz (1884–1972)

臨界点とモノドロミー，大域的トポロジー．

— J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies **61**, Princeton Univ. Press (1969).

— V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade, A.N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps II: Monodromy and Asymptotic Integrals*, Monographs in Math. **2**, Birkhäuser (1988).

【 モース理論 (大域変分法) 】

N を C^∞ 多様体,

$f : N \rightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ 写像とする.

$t \in N$ が f の正則点 (resp. 特異点, 臨界点)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} df_t \neq 0$ (resp. $df_t = 0$).

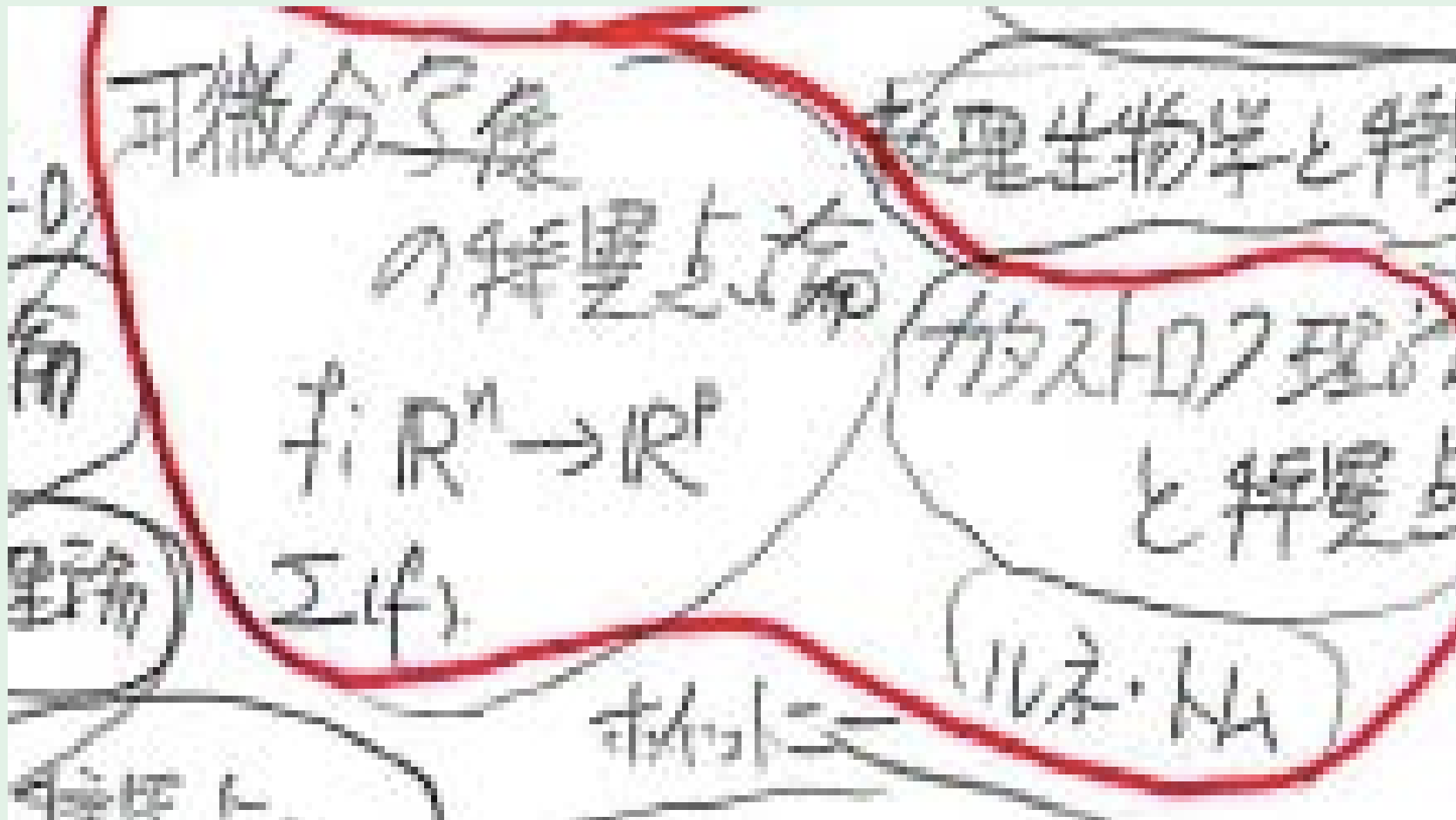
臨界点が非退化 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ ヘッシアン $\neq 0$.

モース関数

モースの補題, CW 複体分割, 大域変分法, 測地線, 対称空間, 周期性定理

— J. Milnor, *Morse Theory*, Ann. of Math. Studies **51** Princeton Univ. Press (1963)

【 特異点論の地図 (拡大図) 】



【 写像の特異点 】

N, M を C^∞ 多様体, $\dim(N) = n, \dim(M) = m$.

(たとえば, $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ の開集合).

$f : N \rightarrow M$ を C^∞ 写像とする.

$t \in N$ が f の正則点 (resp. 特異点, 臨界点)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{rank}(df_t : T_t N \rightarrow T_{f(t)} M) = \min\{n, m\}$$

(resp. $< \min\{n, m\}, < m$).

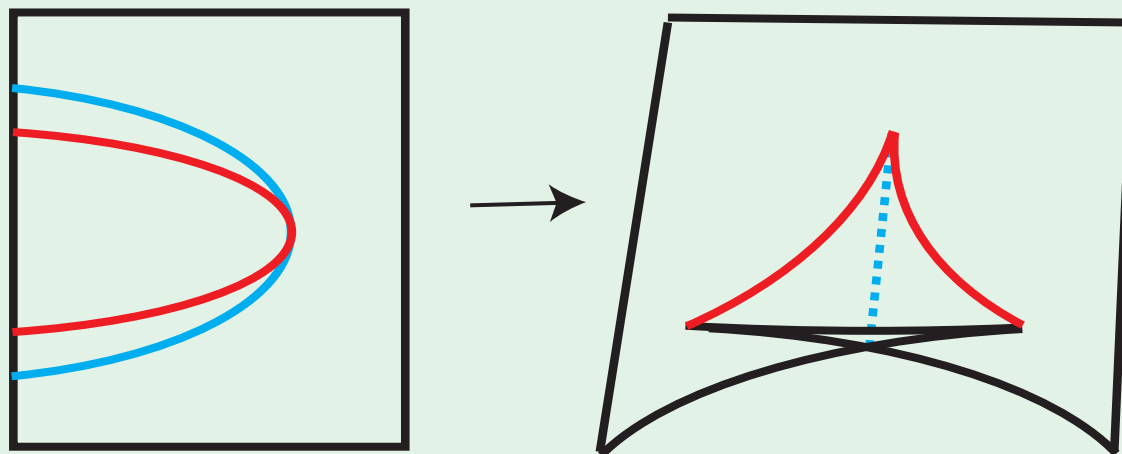
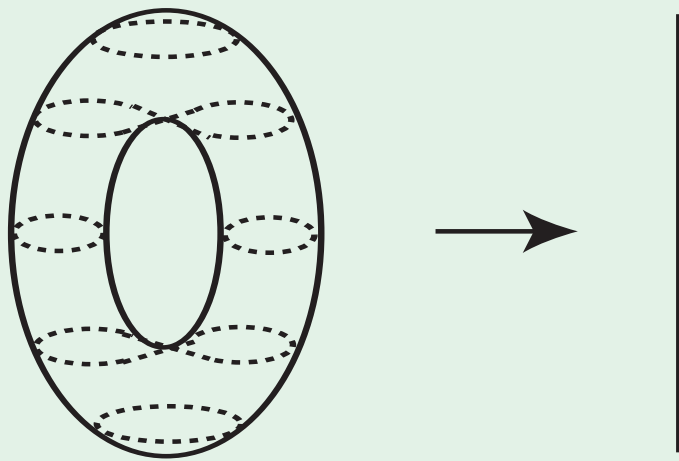
$n \geq m$ のとき, 正則点 = しずめ込み点

特異点の研究 \longrightarrow 特異しずめ込みの研究

$n \leq m$ のとき, 正則点 = はめ込み点

特異点の研究 \longrightarrow 特異はめ込みの研究

【写像の特異点論】



【 写像の特異点論 】

空間 N から空間 M への写像 $f : N \rightarrow M$ のふるまいを調べる.

N の各点での局所的な特異性を調べる.

M の各点での局所的な特異性を調べる.

写像の大域的なふるまいを調べる.

確定性, 安定性, 近似, 分類, 認識, 層化, 変形, 分岐, 隣接関係, 特性類...

【 写像の特異点論 】

ホイットニー (Whitney 1907–1989)

トム (Thom 1923–2002)

ミルナー (Milnor 1931–)

ブリースコーン (Brieskorn 1936–2013)

ウォール (Wall 1936–), ポーチャス (Porteous 1930–2011)

アーノルド (Arnol'd 1937–2010)

マザー (Mather 1942–)

(足立正久, 鈴木治夫, ...) 福田拓生, 松本幸夫, 岡睦雄, ...

小平邦彦, 諏訪立雄, ...

広中平祐, ...

斎藤恭司, ... (以上敬称略)

大事な人名も忘れていますがご容赦ください。

【 写像の特異点論 】

特異点の数理 (福田拓生・泉屋周一・石川剛郎 編) 全4巻

第1巻：幾何学と特異点,

第2巻：特異点と分岐,

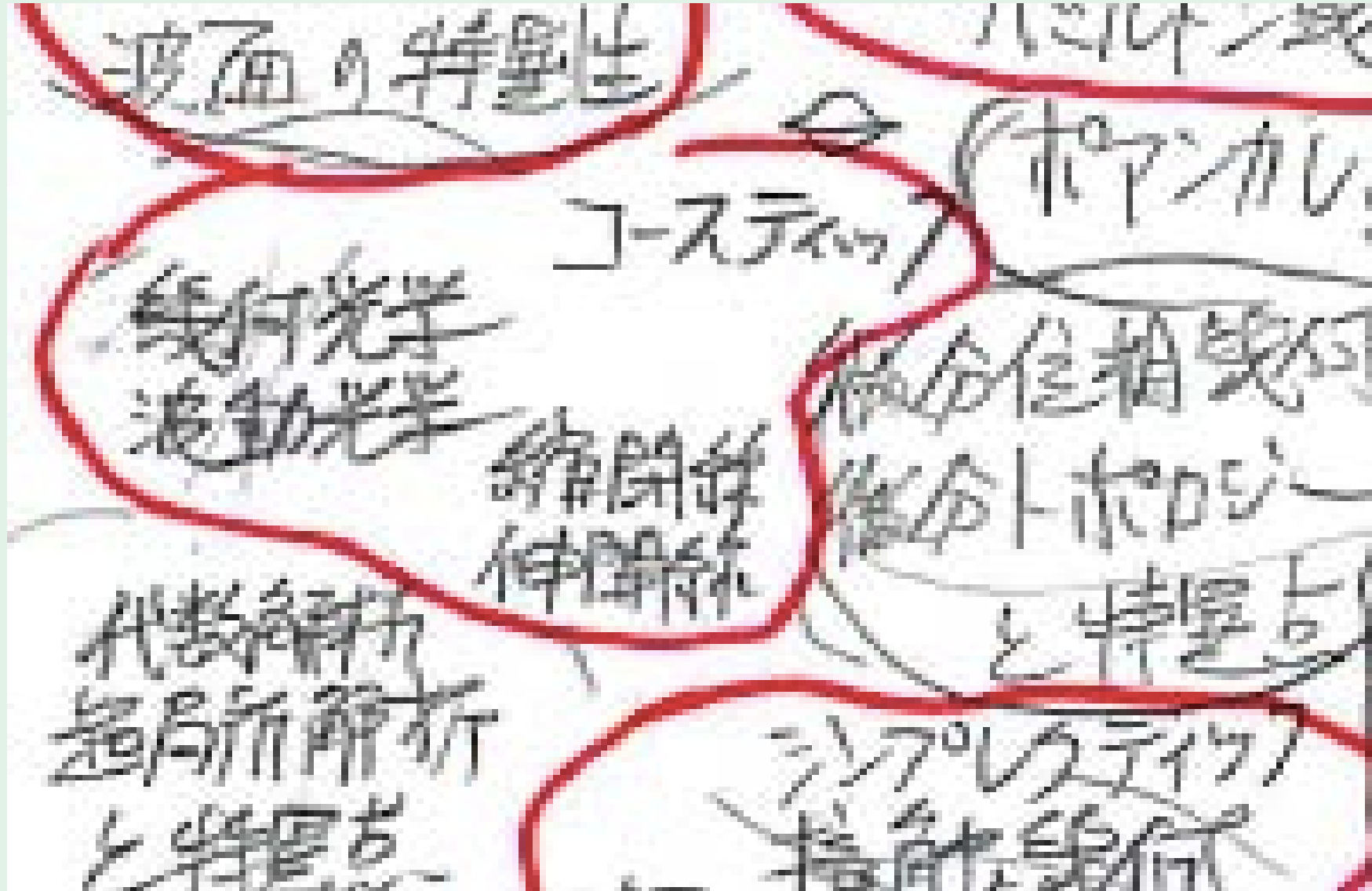
第3巻：解析関数と特異点,

第4巻：代数曲線と特異点,

共立出版 (2001~2002).

歴史をさかのぼると...

【特異点論の地図 (拡大図)】



【特異点論のはじまり？】

● ニュートン (1642–1727) と特異点
べき級数の研究 (Taylor (1685–1731), Maclaurin (1698–1746)
は Newton の学生), ニュートン多面体, ニュートン図形,
光の粒子説

— 金子晃「ニュートン図形・特異点・振動積分：現代的無限小解析入門」
上智大学数学講究録 11 (1981).

- 解析力学と特異点：ニュートン，ラグランジュ，ハミルトン...
- 変分問題と特異点：調和解析と特異点，調和写像の特異点。
リーマン幾何，測地線，共役跡，カット跡．制限つき極値問題，
サブリーマン幾何，アブノーマル測地線....
- 解析力学，変分問題は**特異点の宝庫**。

【 最小作用の原理, 変分法 】

フェルマ (1607–1665), フェルマの原理 (1661).

モーペルテュイ (1698–1759), 最小作用の原理 (1747).

オイラー (1707–1783), Elementa Calculi Variationum(1756–)

ラグランジュ (1736–1813),

オイラー・ラグランジュ方程式 (1750–)

汎関数

$$\Phi := \int_{\Omega} L(x, z, p) dx, \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

について, 変分導関数 $\delta\Phi = 0$ at $z = z(x) \iff$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\partial L}{\partial p_i} \right) = 0.$$

【 ホイヘンスと特異点 】

● ガリレイ (1564–1642)

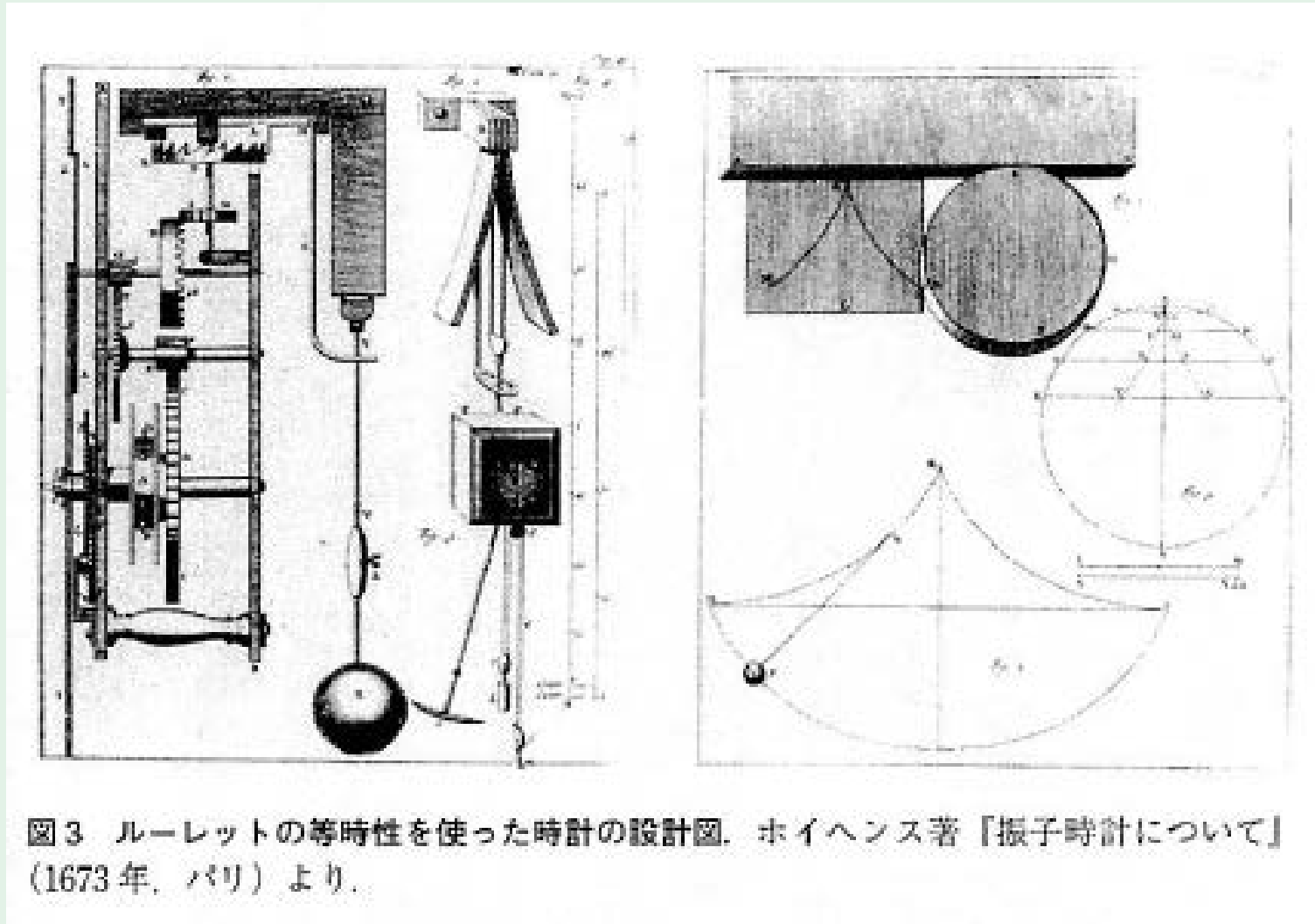
振り子の等時性 (1581)

● ホイヘンス (1629–1695)

最速降下曲線, サイクロイド振り子 (1656, 1673)

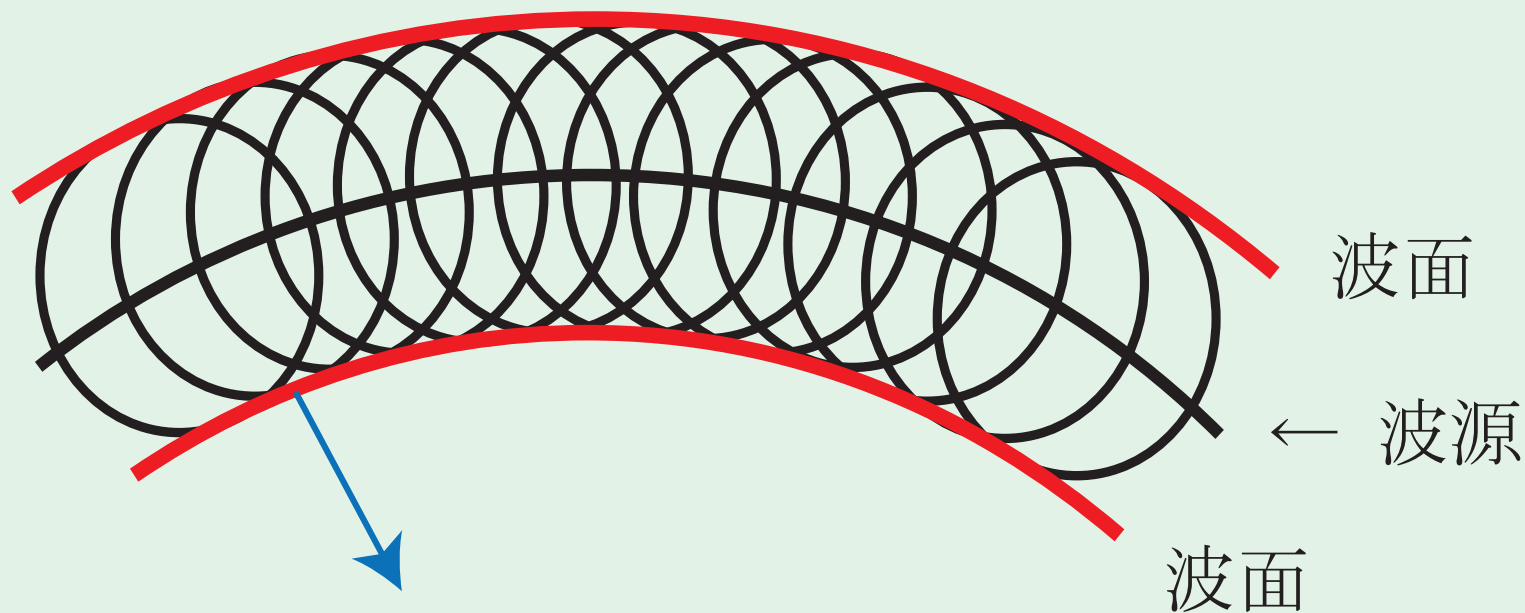
ホイヘンスの原理, 光の波動説 (1690)

【サイクロイド振り子】



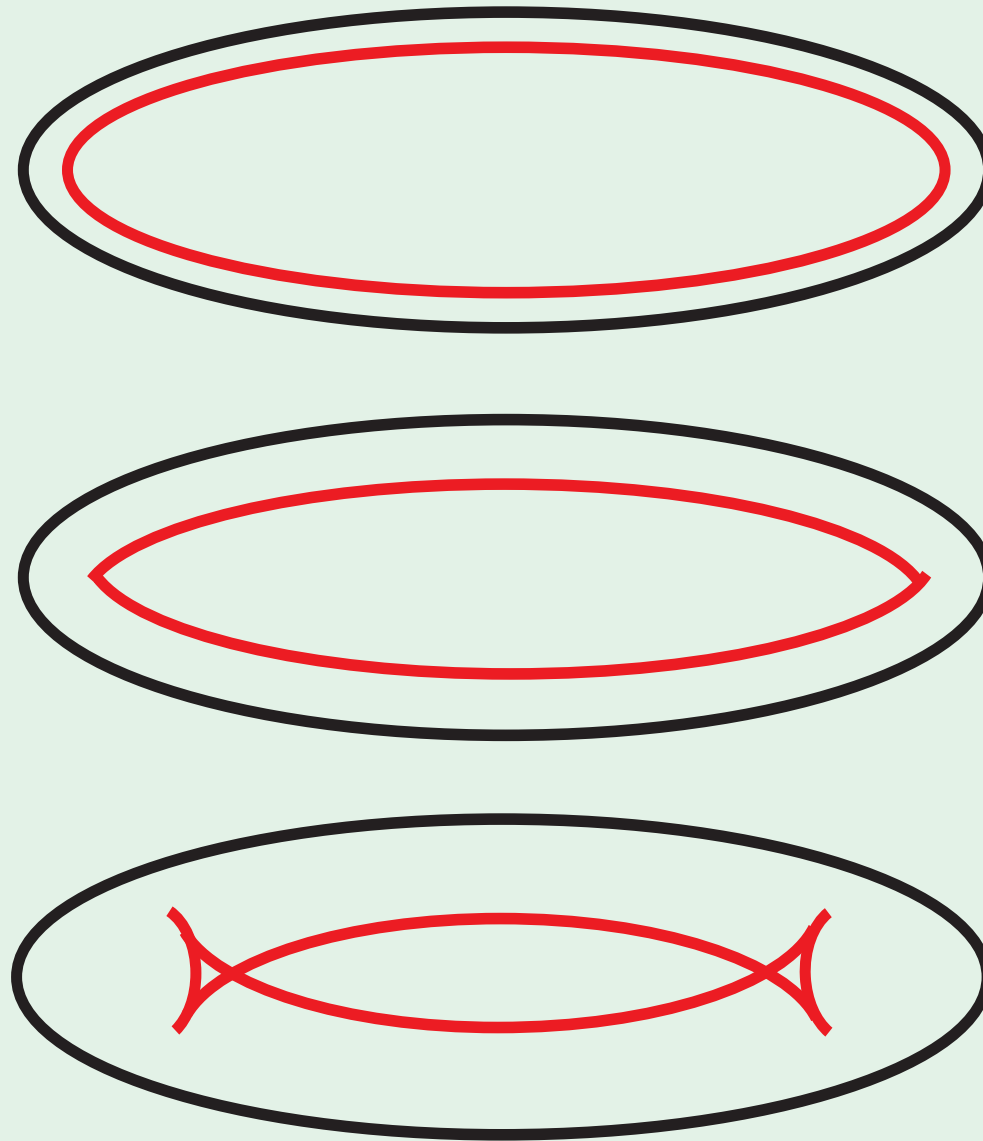
(イーヴァル・エクランド「数学は最善世界の夢を見るか?— 最小作用の原理から最適化理論へ」南條 郁子 訳, みすず書房 (2009), より転載)

【ホイヘンスの原理, 波面, 平行曲線 (平行曲面)】

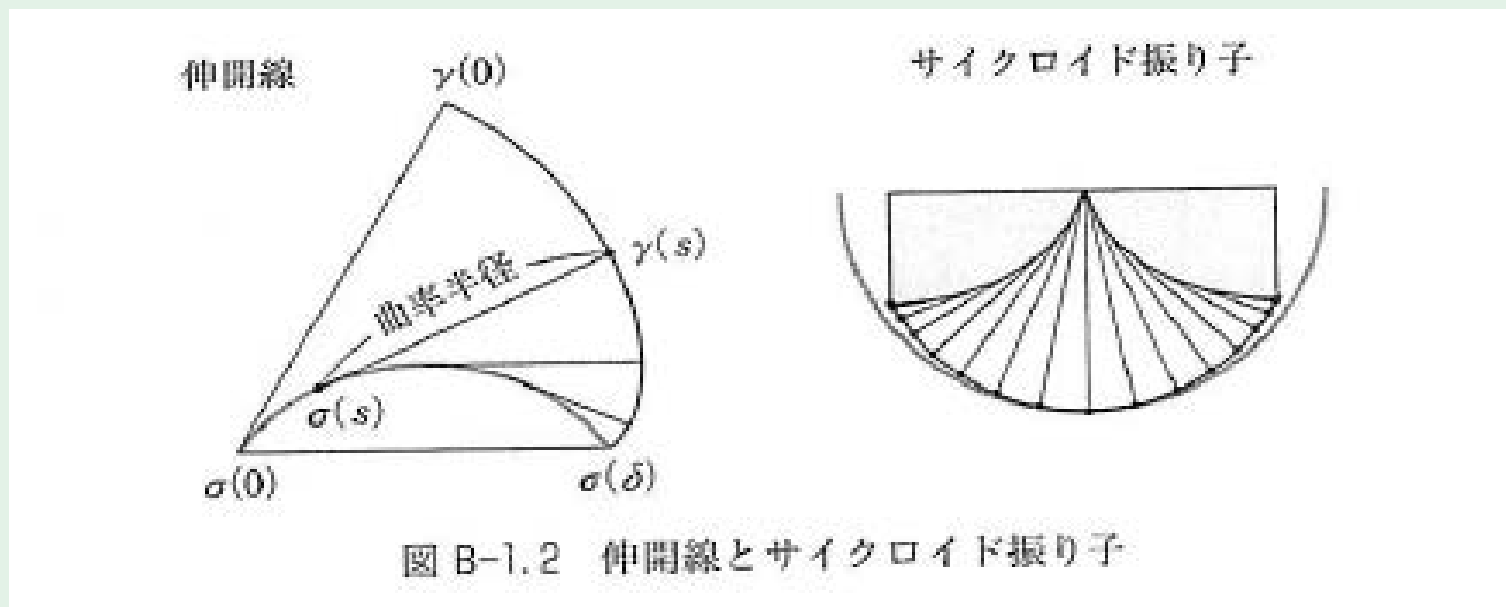
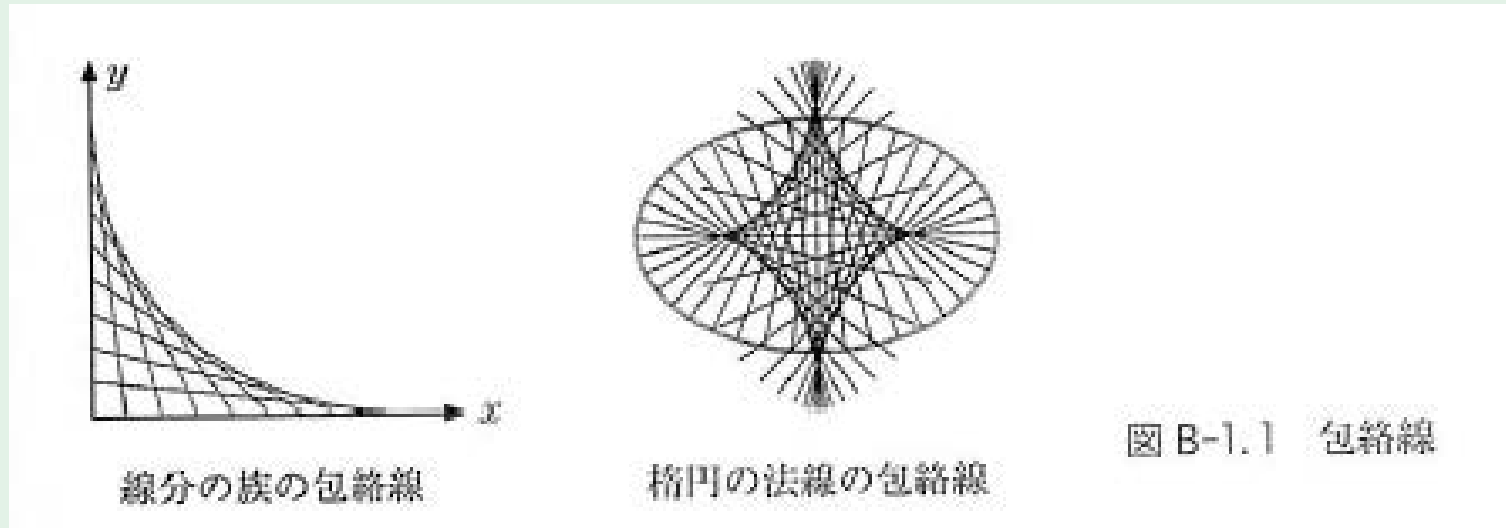


波面には, 法線方向が自然に定まる.

(波面に特異点が生じて大丈夫.)



wavefront evolution



(梅原雅顕, 山田光太郎著「曲線と曲面 (改訂版) - 微分幾何的アプローチ -」裳華房 (2015), より転載)

【 振動積分の特異性 】

高周波解析, 漸近解析, $h \rightarrow 0$

$$I(h, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sqrt{-1}f(x, \lambda)/h} a(x, \lambda) dx$$

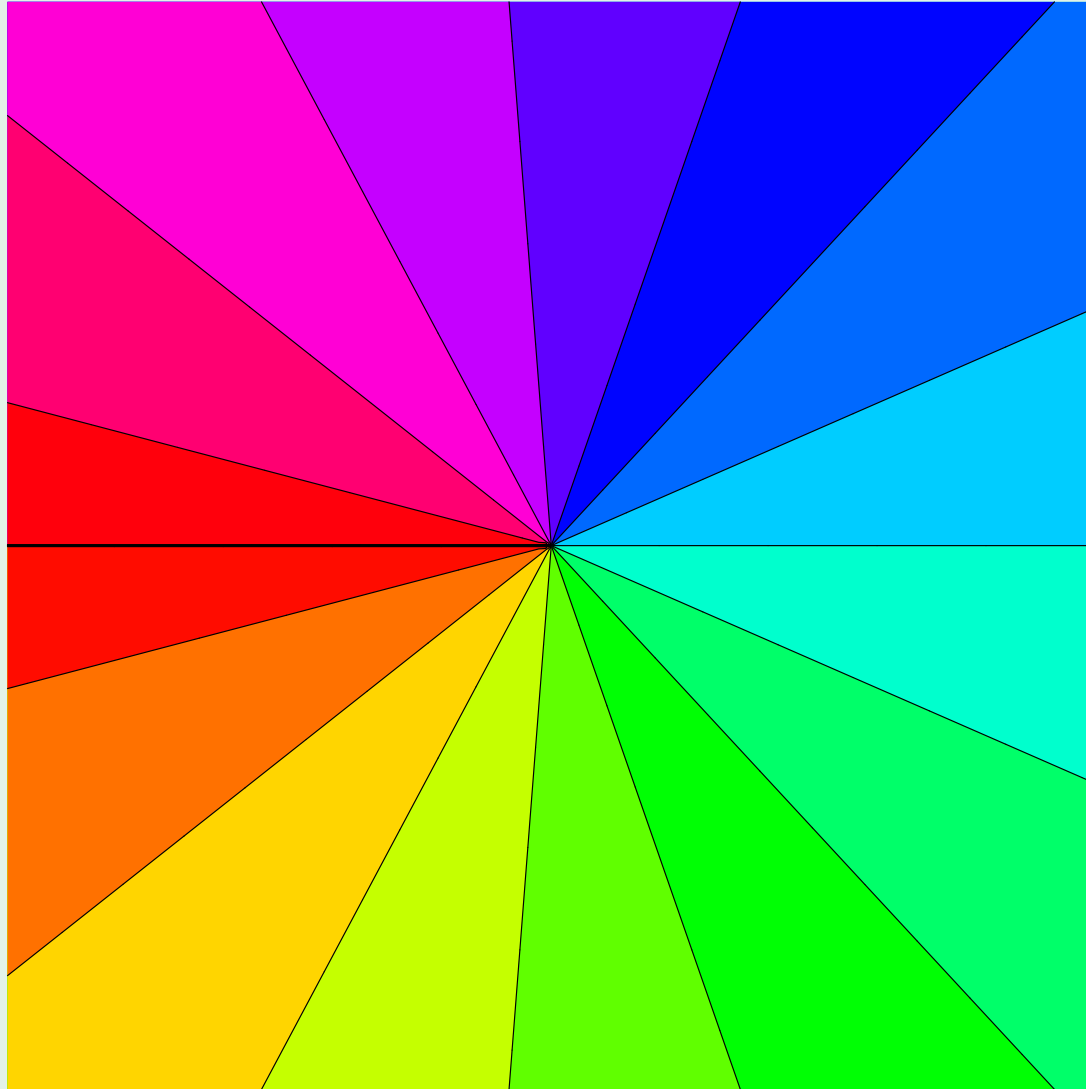
f : 相関数, a 振幅関数, h 波長, λ パラメータ.

— 停留位相の方法, (f の臨界点が積分の近似に寄与, コースティック).

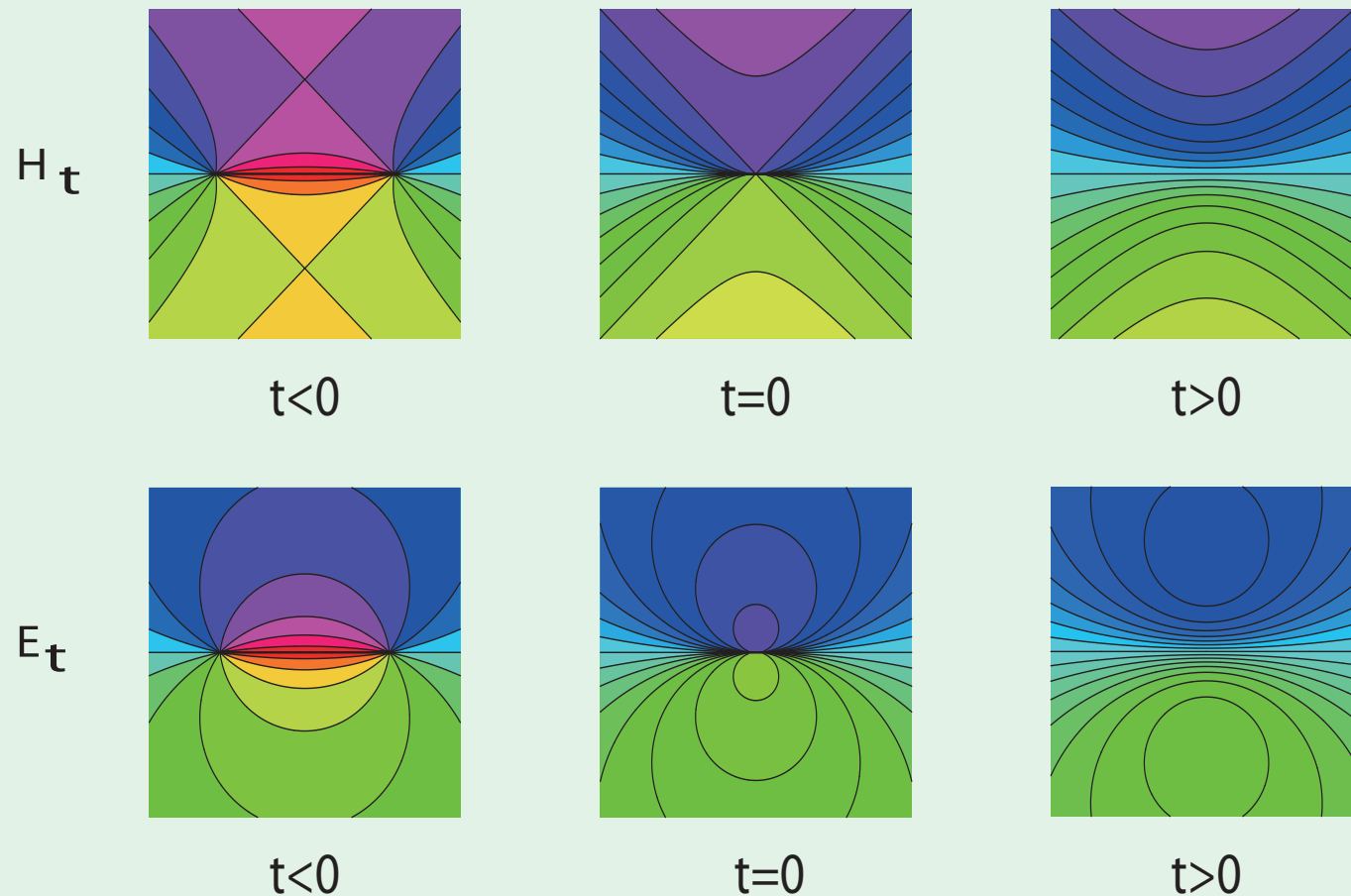
— ラグランジュ・ルジャンドル特異点

— phase singularity and criticality

【 相特異点 (phase singularity) 】



【相特異点】



J. Adachi, G. Ishikawa, *Classification of phase singularities for complex scalar waves and their bifurcations*, Nonlinearity **20** (2007), 1907–1925.

【ラグランジュ・ルジャンドル特異点 — 母関数の方法】

特異点の開折 (unifolding) 変形 (deformation)

退化した特異点を開く (“きれい” な特異点を歪める)

母関数族. $F(t, x) : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$,

$$C(F) := \{(t, x) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m \mid \frac{\partial F}{\partial t_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial t_r} = 0\}$$

$$L : C(F) \rightarrow T^*\mathbb{R}^m, L(t, x) := (x, p), p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x).$$

シンプレクティック幾何, ラグランジュ部分多様体,

$\pi \circ L : C(F) \rightarrow \mathbb{R}^m$ の特異値集合 (コースティックス).

$$\mathcal{L} : C(F) \rightarrow P(T^*\mathbb{R}^{m+1}),$$

$$\mathcal{L}(t, x) := (x, F(t, x), [\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(t, x), -1]).$$

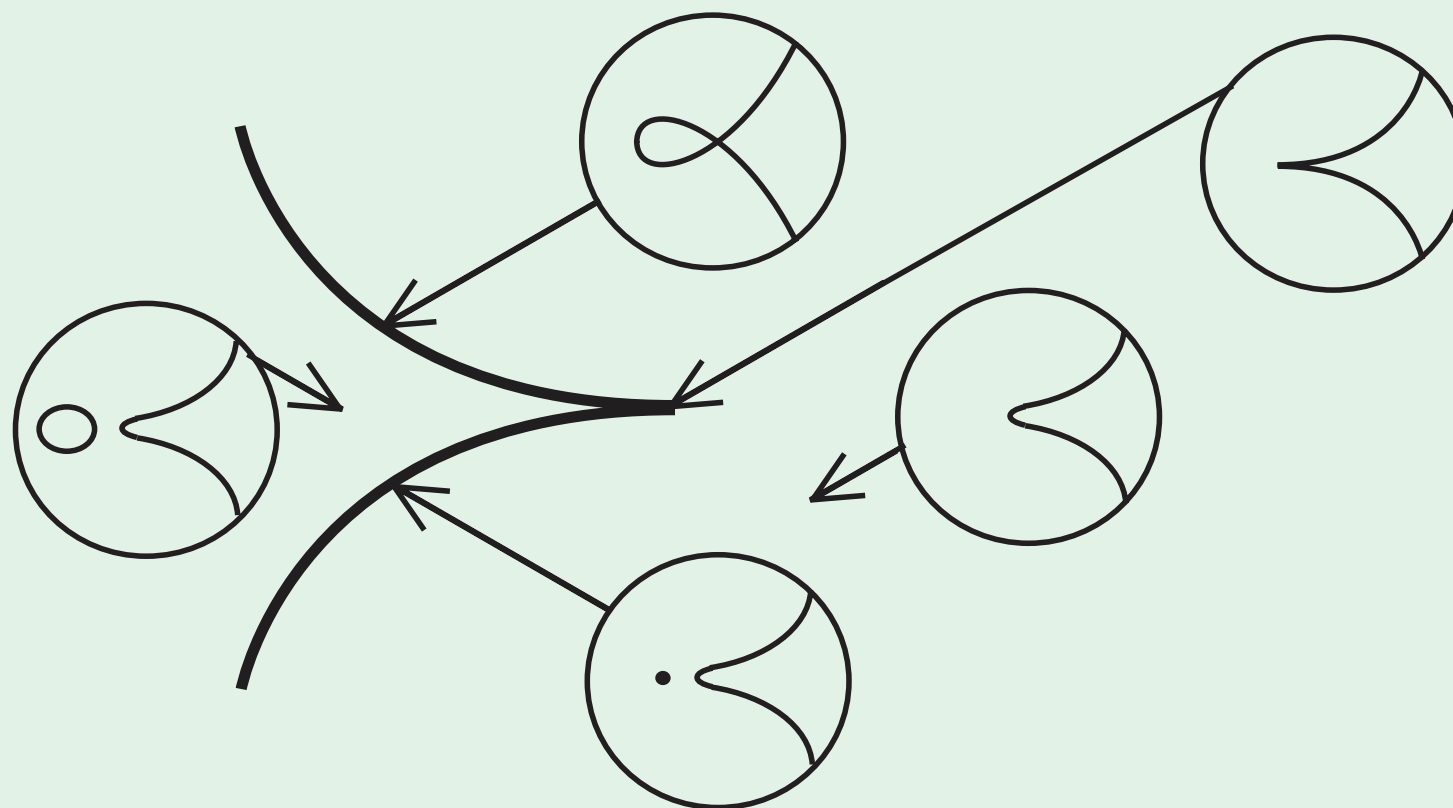
接触幾何, ルジャンドル部分多様体,

$\pi \circ \mathcal{L} : C(F) \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ の像, (フロント).

【 実代数幾何と特異点 】

実代数多様体の位相的分岐

$$G(x, y; u, v) = x^3 - y^2 + ux + v = 0$$



→ ヒルベルト第16問題.

【 微分幾何学と特異点 】

曲線論や曲面論において，特異点をどう研究するか？

2つの方向性.

- 特異点論を微分幾何学に適用する
- 特異性の在る対象に微分幾何の理論を拡張する.

【 特異点論的観点からの微分幾何学 】

— 泉屋 周一, 佐野 貴志, 佐伯 修, 佐久間 一浩 「幾何学と特異点」 (特異点の数理 1) 共立出版 (2001). (微分幾何学と特異点).

— Shyuichi Izumiya, Maria del Carmen Romero Fuster, Maria Aparecida Soares Ruas, Farid Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific Publishing Co. (2015).

正則曲線と円や直線との接触, 正則曲面と球や平面との接触などを特異点論を用いて調べ, 曲線, 曲面の “higher order singularities” を捉える方法: [Thom, Porteous, Izumiya の方法](#).

【 正則曲線 】

$I \subset \mathbb{R}$ を开区間とし,

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t))$, を C^∞ 写像とする.

$p \in I$ が f の正則点 (resp. 特異点)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \gamma'(p) = (x'(p), y'(p)) \neq (0, 0),$$

(resp. $\gamma'(p) = (x'(p), y'(p)) = (0, 0)$.)

p が正則点のとき, 曲率半径の逆数として曲線の曲率 $\kappa(p)$ が定まる.

【 距離 2 乗関数 (族) 】

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ に対し, 距離 2 乗関数族

$F : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(t, X, Y) := (X - x(t))^2 + (Y - y(t))^2$ を考え,

その特異性を調べる :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2(X - x(t))\dot{x}(t) + 2(Y - y(t))\dot{y}(t) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 2(X - x(t))\ddot{x}(t) + 2(Y - y(t))\ddot{y}(t) - 2\dot{x}(t)^2 - 2\dot{y}(t)^2 = 0,$$

とおき, 法線族の包絡線 (= 臨界点の分岐線) を求めると,

$$\begin{cases} (X - x(t))\dot{x}(t) + (Y - y(t))\dot{y}(t) & = 0 \\ (X - x(t))\ddot{x}(t) + (Y - y(t))\ddot{y}(t) & = \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 \end{cases}$$

より,

$$X - x(t) = \frac{-\dot{y}(t)\{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}, \quad Y - y(t) = \frac{\dot{x}(t)\{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)},$$

【 距離 2 乗関数 (族) 】

曲率半径 $R(t)$, 曲率 $\kappa(t)$ は,

$$R(t) = \sqrt{(X - x(t))^2 + (Y - y(t))^2} = \frac{\{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}^{3/2}}{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)|},$$

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)|}{\{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}^{3/2}}$$

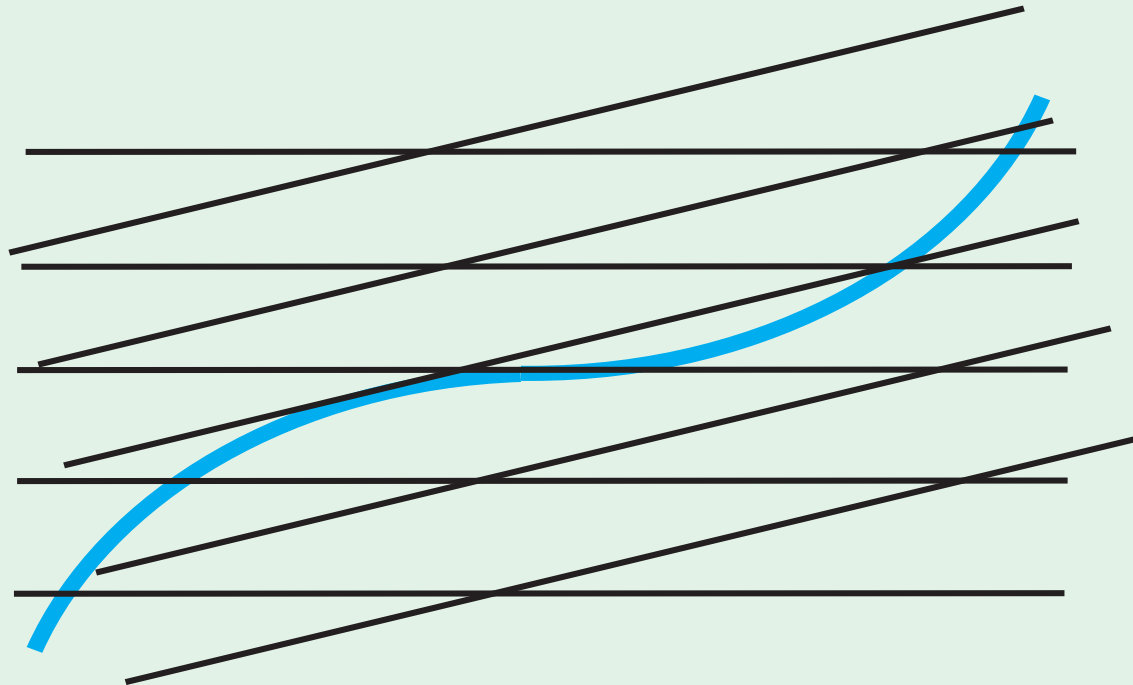
で与えられる.

曲線と円の接触を調べる.

曲率, 縮閉線 (evolute), 焦線 (caustic), 伸開線 (involute), ...

【 高さ関数 (族) 】

$$H : I \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}, H(t, v) := \gamma(t) \cdot v.$$



曲線と直線の接触を調べる.

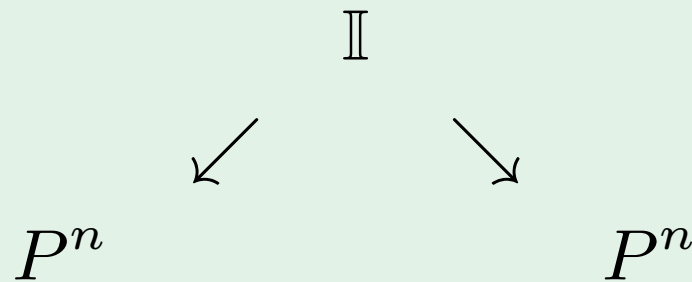
変曲点：ある方向 v の高さ関数が non-Morse (退化臨界点).

【射影幾何学と特異点】

$$P^n = \{[x] \mid x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\}.$$

$$P^n \times P^n \supset \mathbb{I} = \{([x], [y]) \mid x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0\}$$

incidence variety, $(2n - 1)$ 次元接触多様体.



射影双対

$$n = 2.$$

3/1 型変曲点と 3/2 型カスプが射影双対で互いに写り合う.

【 写像芽の微分同相 (右左同値), 右同値 】

$f : N \rightarrow M, g : N' \rightarrow M', p \in N, q \in N'$ について, f_p と g_q が **diffeomorphic** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \sigma, \Phi$ local diffeos. such that

$$\begin{array}{ccc} (N, p) & \xrightarrow{f} & (M, f(p)) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \Phi \\ (N', q) & \xrightarrow{g} & (M', g(q)). \end{array}$$

が可換.

右同値 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \Phi$ を恒等写像に取ることができる.

【 曲線と曲面 】

微分幾何学で扱う曲線や曲面は，写像の右同値類とも考えられる．

曲線は， $\gamma : I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^m$ の右同値類．

曲面は， $p : U(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^m$ の右同値類．

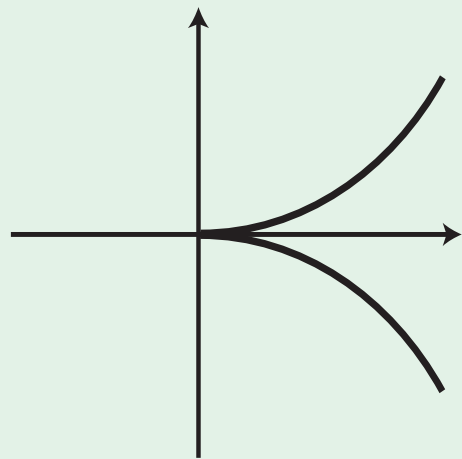
右同値類：un-parametrized curve, un-parametrized surface.

(向きを保つ diffeom に限れば，向き付き曲線，曲面の概念が得られる.)

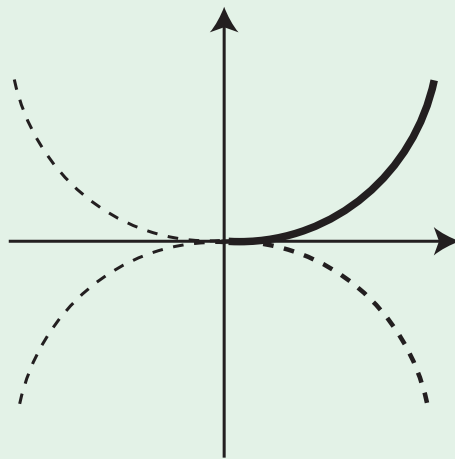
【カスプ (3/2-カスプ)】

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ が点 $p \in I$ で **カスプ**特異点をもつ

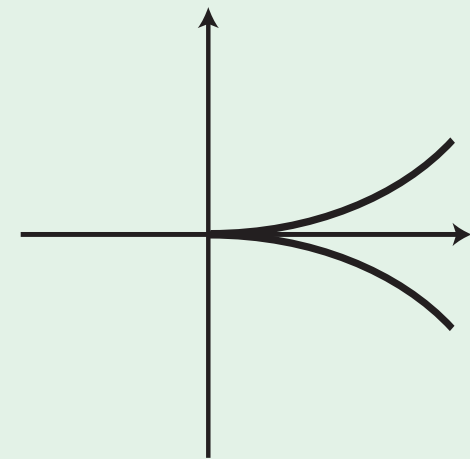
$\stackrel{\text{def}}{\iff} t \rightarrow (x(t), y(t)) = (t^2, t^3)$ at $t = 0$ と diffeomorphic (右左同値, \mathcal{A} -同値) 右左の局所微分同相で移り合う.



$$y = x^{\frac{3}{2}}$$



$$y = x^{\frac{5}{2}}$$



$$y = x^{\frac{5}{2}}$$

3/2-カスプはフロント, 5/2-カスプはフロンタルでありフロントでない.

【カスプ (3/2-カスプ)】

カスプ特異点 γ_p に対し,

$$\lim_{t \rightarrow p} |\kappa(\gamma, t)| = \infty$$

(この性質は, diffeomorphism で不変).

微分幾何的には, 正則曲線が局所的にもいろいろあるように,

微分幾何的には, 3/2 カスプにもいろいろある.

より精密な微分幾何的不変量が研究されている: **カスプ的曲率**

(サイクロイド的曲率)

— 梅原雅顕 「特異点を持つ曲線と曲面の幾何学」慶応義塾大学 Seminar on Mathematical Sciences **38**, (2009).

一般の“フロント”に対して曲率が定義され，曲線の合同類が特徴付けられる。

T.Fukunaga, M.Takahashi, *Existence and uniqueness for Legendre curves*, J. Geom. **104** (1013), 297–307.

【 単位接束 】

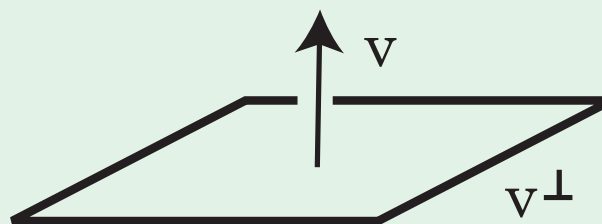
M をリーマン多様体とするとき,

$T_1M := \{(x, v) \in TM \mid |v| = 1\}$ 単位接ベクトル束とおく.

$D \subset T(T_1M)$ subbundle を

$$w \in D_{(x,v)} \stackrel{\text{def}}{\iff} \pi_*(w) \perp v$$

により定める. (ただし, $\pi : T_1M \rightarrow M$ は自然な projection.)



D は接触構造 (完全非可積分).

【 接触要素の作る多様体 】

$P(T^*M)$: M の接超平面全体 (接触要素) の作る多様体とする.
写像 $T_1M \rightarrow P(T^*M)$ を
 $(x, v) \mapsto (x, v^\perp)$ で定めると, これは double cover であり,
 $P(T^*M)$ の上に自然に (metric によらずに) 接触構造が誘導される.

【 フロントラル 】

$f : N^n \rightarrow M^{n+1}$ が **フロントラル** (あるいはフロントラル写像)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists (f, [\alpha]) : N \rightarrow P(T^*M)$ with $\alpha(t)|_{f_*(T_t N)} = 0$.

$\iff f$ は $P(T^*M)$ 上の自然な接触構造の (特異点をもつた) 積分多様体になるようなもち上げ $\tilde{f} : N \rightarrow P(T^*M)$ をもつ.

$\iff \forall t_0 \in N, \exists U$ nbd of $t_0, \exists (f, \nu) : U \rightarrow T_1M,$
 $f_*(T_t N) \cdot \nu(t) = 0$ for any $t \in U$. (少なくとも局所的に法ベクトルが取れる).

【 フロント 】

フロントル $f : N^n \rightarrow M^{n+1}$ が **フロント**

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists$ はめ込み $(f, [\alpha]) : N \rightarrow P(T^*M)$ with $\alpha(t)|_{f_*(T_t N)} = 0$.

$\iff f$ は $P(T^*M)$ 上の自然な接触構造の (特異点をもった) 積分多様体になるようなもち上げ $\tilde{f} : N \rightarrow P(T^*M)$ ではめ込みであるものをもつ.

$\iff \forall t_0 \in N, \exists U$ nbd of $t_0, \exists (f, \nu) : U \rightarrow T_1M, f_*(T_t N) \cdot \nu(t) = 0$ for any $t \in U$. (少なくとも局所的に法ベクトル ν が取れ, (f, ν) がはめ込み).

【 曲面論 】

(cf. Kepler (1571–1630), Heygens (1629–1695), Newton (1642–1727)),

Euler (1707–1783), Monge (1746–1818), Gauss (1777–1855), Bonnet (1819–1892), Codazzi (1824–1873), Riemann (1826–1866), Beltrami (1835–1900), Darboux (1842–1917),

(cf. 坂本龍馬 (1836–1867), 明治元年 1868, 五代友厚 (1836–1885), 広岡浅子 (1849–1919)) , 中央大学の創立 (1885))

Ricci (1853–1925), Bianchi (1856–1928), Levi-Civita (1873–1941), Blaschke (1885–1962) (Chern の先生), Chern (1911–2004), ...

【 曲線と曲面 】

梅原雅顕, 山田光太郎 「曲線と曲面 – 微分幾何的アプローチ –」
裳華房 (2002, 改訂版 2015).

◆ 改訂版で加筆・追加された項目 ◆

- 曲面論の基本定理とその証明
- 極小曲面の具体例
- 曲面の測地的曲率
- ガウス曲率が負で一定の回転面の分類
- ポアンカレ-ホップの指数定理と曲面の臍点との関係
- 曲線と曲面に現れる代表的な特異点とその判定法

【 正則曲面 】

$U \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とし, $f = (f_1, f_2, f_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を C^∞ 写像とする.

$(u_0, v_0) \in U$ が f の正則点 (regular point) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$J(f)(u_0, v_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

の階数が 2.

【 ガウスと特異点 】

Gauss (1777–1855)

ガウスの曲面論

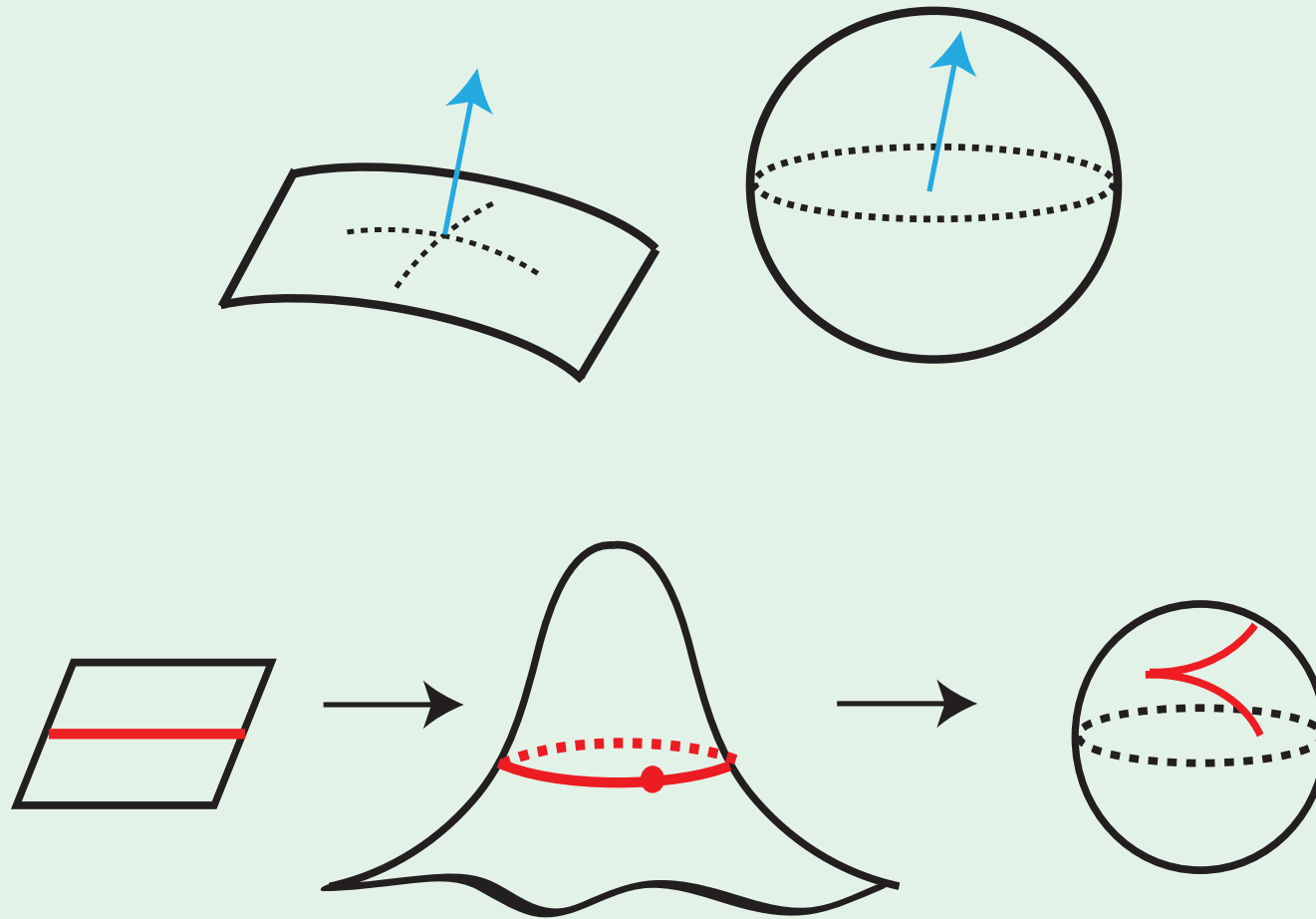
Disquisitiones generales circa superficies curvas (General investigations on curved surfaces, 曲面に関する一般的研究, 1827)

ガウス曲率, ガウス写像, 球面3角形と平面3角形の比較.

非ユークリッド幾何, (ロバチェフスキー, ボヤイ)

【 ガウス写像 】

正則点の近傍で，法線 (normal) が定まる． U の向きと \mathbb{R}^3 の向きを決めれば，法線ベクトルが定まる．



【 曲面の特異点 】

$(u_0, v_0) \in U$ が $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ の特異点 (singular point)

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$

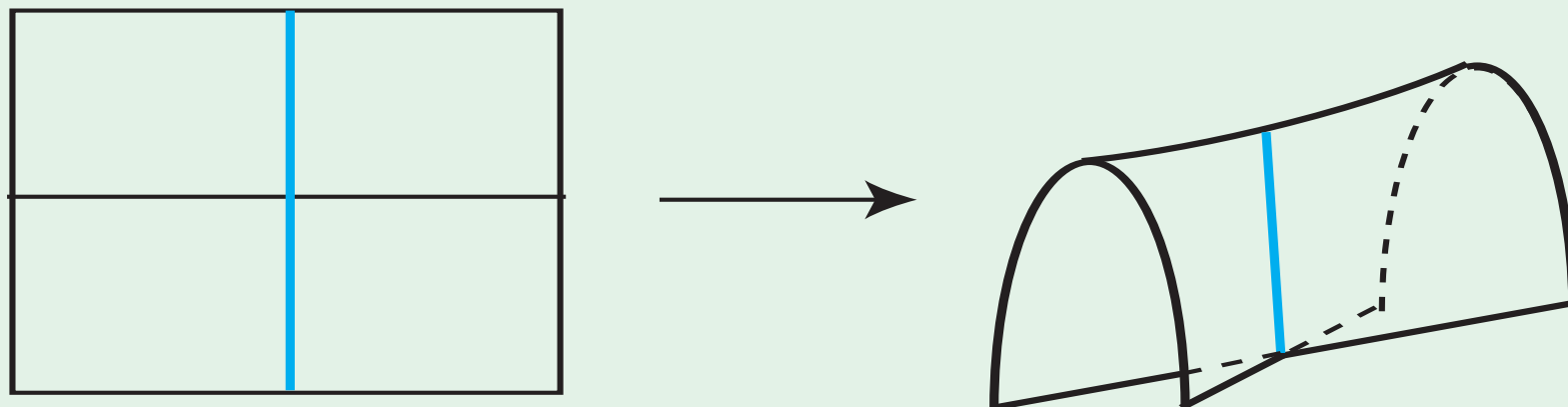
$$J(f)(u_0, v_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

の階数 < 2 .

【 交差帽子 (cross cap), ホイットニーの傘 (Whitney umbrella) 】

$$f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$$

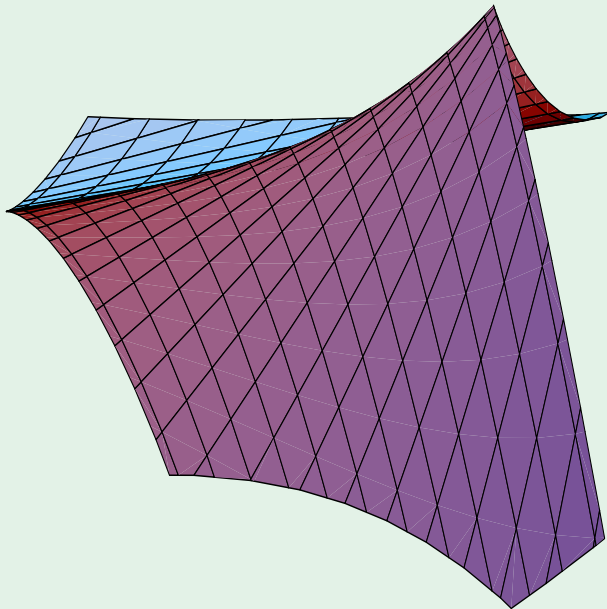
$$f(u, v) = (u, v^2, uv)$$



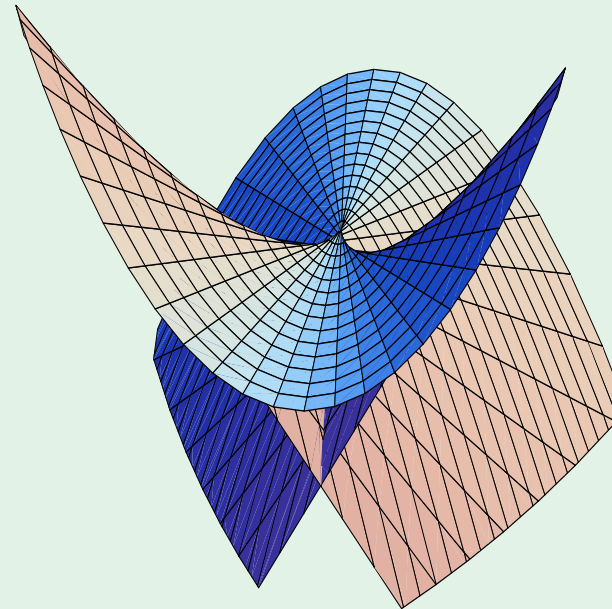
cross cap は frontal でも front でない.

【 フロント曲面のジェネリック特異点 】

ジェネリックなフロント $f : U(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ の各点での写像芽は，正則，カस्पエッジ (cuspidal edge) または スワロウテイル (swallowtail) と右左同値である。



cuspidal edge



swallowtail

【 特異曲率 】

カスプ辺の特異曲率

— Kentaro Saji, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada, *The geometry of fronts*, *Annals of Math.*, **169-2** (2009), 491–529.

【 Coherent tangent bundle 】

フロンタル曲面論の内在化, 特異計量

m 次元多様体 M 上の接束 TM から M 上の m 次元ベクトル束 \mathcal{E} への束写像 $\varphi : TM \rightarrow \mathcal{E}$ を考える.

— Kentaro Saji, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada, *Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts*, J. Geom.Anal., **22** (2012), 383–409.

また話は歴史をさかのぼって...

【オイラーと特異点】

オイラー標数 (トポロジー)

オイラー方程式 (変分法)

可展面の研究

Leonhard Euler (1707–1783) 1771

De solidis quorum superficiem in planum explicare licet,
(E419), *Novi commentarii academiae scientiarum imperialis*
Petropolitanae XVI (1771), 3–34. Rpt. *Leonhardi Euleri*
Opera Omnia : Series 1, vol. 28, pp. 161–186. (表面が平面
上に展開されている固体, 新論評ペテルスブルク帝国科学アカ
デミー)

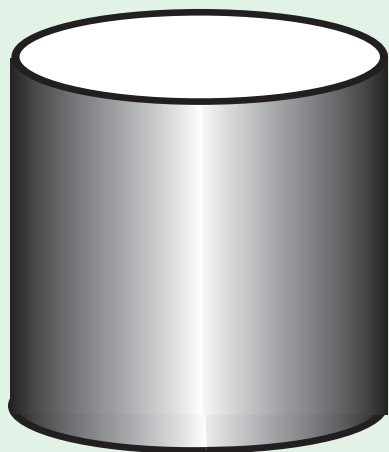
【モンジュと特異点】

射影幾何

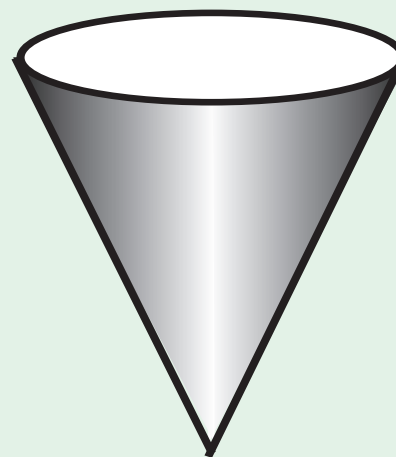
可展面の研究

Monge (1746–1818) 1785; written in 1771,
Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure,
Mémoires de divers sçavans **10**, 511–550. (空間曲線の可展面,
曲率半径, 2種類の曲率に関する覚書).

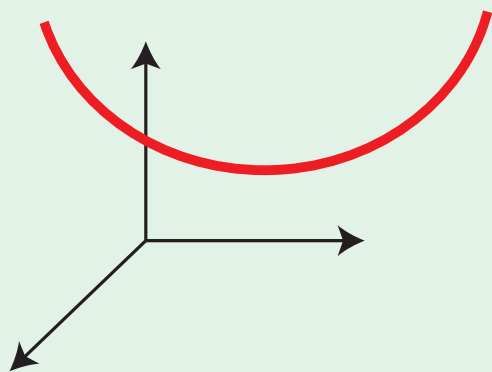
ちなみに, “differential geometry” という用語を最初に使われたのは, Luigi Bianchi の教科書 *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa, 1886). (微分幾何学講義) と言われている.



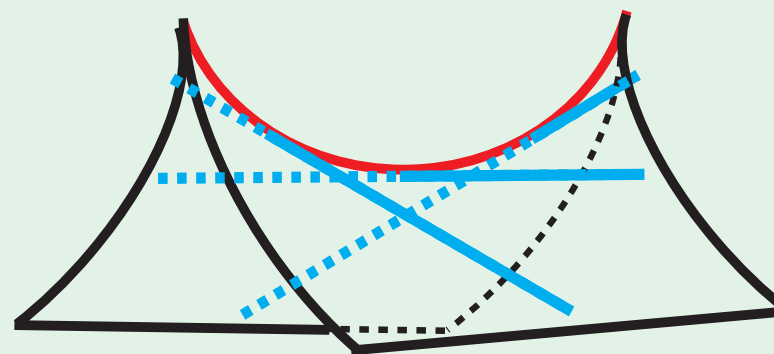
Cylinder



Cone



Space curve



Tangent surface

【 平坦曲面の特異点 】

— Satoko Murata and Masaaki Umehara, *Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space*, J. Differential Geom., **82-2** (2009), 279–316.

— Kosuke Naokawa, *Singularities of the asymptotic completion of developable Möbius strips*, Osaka J. of Math., **50-2** (2013), 425–437.

【 ヘッシアン一定曲面, ガウス曲率一定曲面 】

● ガウス曲率一定曲面

— \mathbb{R}^3 のガウス曲率 K が定数 > 0 でコンパクトな正則曲面は球面に限る. (Liebmann の定理)

— \mathbb{R}^3 のガウス曲率 K が定数 < 0 で完備な正則曲面は存在しない. (Hilbert の定理)

— \mathbb{R}^3 のガウス曲率 K が定数 $= 0$ で完備な正則曲面は柱面に限る. (Hartman-Nirenberg の定理)

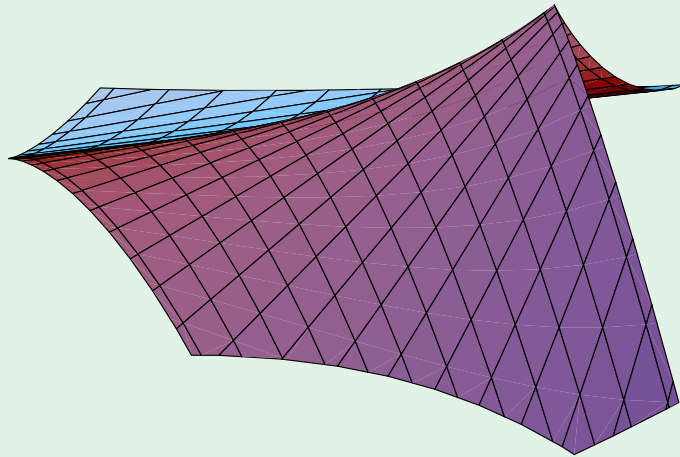
● ヘッシアン一定曲面

— \mathbb{R}^3 の曲面 $z = f(x, y)$ でヘッシアン $\text{Hessian}(f)$ が一定 $\neq 0$ を満たすものは, 2次多項式のグラフに限る (Jörgens の定理. cf. Bernstein の定理).

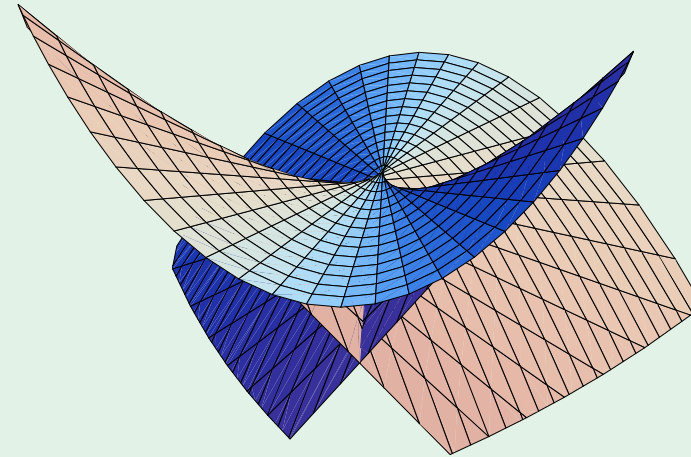
— $\text{Hessian}(f) = 0 \Leftrightarrow K = 0$. 1次多項式のグラフに限る.

【 ヘッシアン一定曲面, ガウス曲率一定曲面の特異点 】

定理. (Machida-I) $\text{Hessian} = c \neq 0$ あるいは $K = c \neq 0$ の「幾何学的解」のジェネリックな特異点は, cuspidal edge と swallowtail に限る.



cuspidal edge



swallowtail

Goo Ishikawa, Yoshinori Machida, *Singularities of improper affine spheres and surfaces of constant Gaussian curvature*, International J. of Math., **17-3** (2006), 269–293.

幾何学的特異点の分類には、次の論文で証明された **cuspidal edge** と **swallowtail** の特徴付けを利用した：

— M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada,
Singularities of flat fronts in hyperbolic space, Pacific J. of Math.
221-2 (2005), 303–351.

【 極小曲面，平均曲率一定曲面の特異点 】

変分問題の解として自然に現れる幾何学的対象

極小曲面に関するワイヤシュトラスの表現定理

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$f(w) = \operatorname{Re} \left(\int_0^w f(1 - g^2) dz, \int_0^w \sqrt{-1} f(1 - g^2) dz, 2 \int_0^w f g dz \right)$$

(極小曲面は，正則関数，有理型関数で表現される)

→

解空間が記述される。 **曲面の特異点が，正則関数の特異性から研究される。**

【 ミンコフキール空間の極大曲面 】

山田さんの講演

— M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J., **35** (2006), 13–40.

— S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z., **259** (2008), 827–848.

— S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *New maximal surfaces in Minkowski 3-space with arbitrary genus and their cousins in de Sitter 3-space*, Results in Math., **56** (2009), 41–82.

.....

【 曲面の特異性 】

幾何学的条件を満たす曲面のクラス

表現定理 → “解空間” の記述

偏微分方程式, 変分問題の解曲面の延長問題,

複素関数の場合は コーシー・リーマン方程式.

延ばせるだけ延ばしたとき, どうなるか? 完備性

【 微分式系， 接触幾何， 波面 】

微分方程式を幾何学的に扱うために微分式系を考えたとき，その「幾何学的解」として曲線や曲面を捉えると，それらは，特異点をもつ曲線や曲面である「フロント」あるいは「フロンタル」として理解するのが自然である。

$$dz - pdx - qdy = 0$$

いろいろな幾何学でジェネリックなフロント・フロンタルの局所・大域的研究が現在行われている。幾何学における特異点，いわば幾何学的特異点に注目したとき，それぞれの幾何の問題に応じて様々なジェネリック特異点が現れる。ジェネリックな特異点がそれぞれの幾何学，幾何の問題を体現しているとも言えるのではないか。

【オイラー・ラグランジュ・モンジュ・アンペール微分方程式】

ある変分問題のオイラー・ラグランジュ方程式と接触同値となるモンジュ・アンペール方程式は,

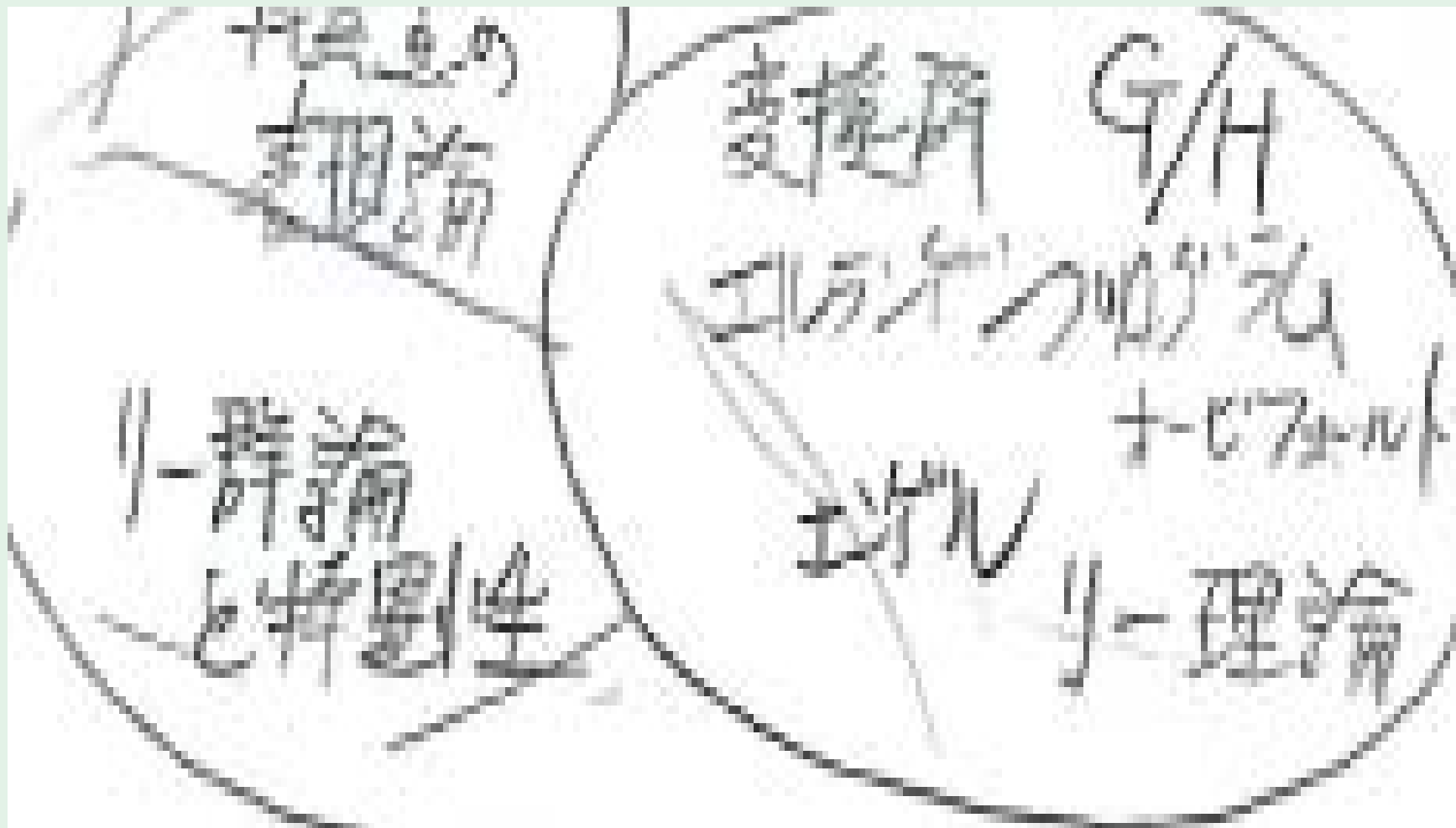
$$\text{Hessian}(z) = F_1(x, y, z) \cdot F_2(p, q, px + qy - z)$$

の形 ($z = z(x, y), p = \partial z / \partial x, q = \partial z / \partial y$)

— P. Griffiths, D. Grossman, R.L. Bryant, *Exterior Differential Systems and Euler-Lagrange Partial Differential Equations*, University of Chicago Press, (2003).

— G. Ishikawa, Y. Machida, *Monge-Ampère systems with Lagrangian pair*, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*, **11** (2015), 081, 32 pages.

【特異点論の地図 (拡大図)】



【 エルランゲン・プログラム 】

対称性・Lie 群と幾何学

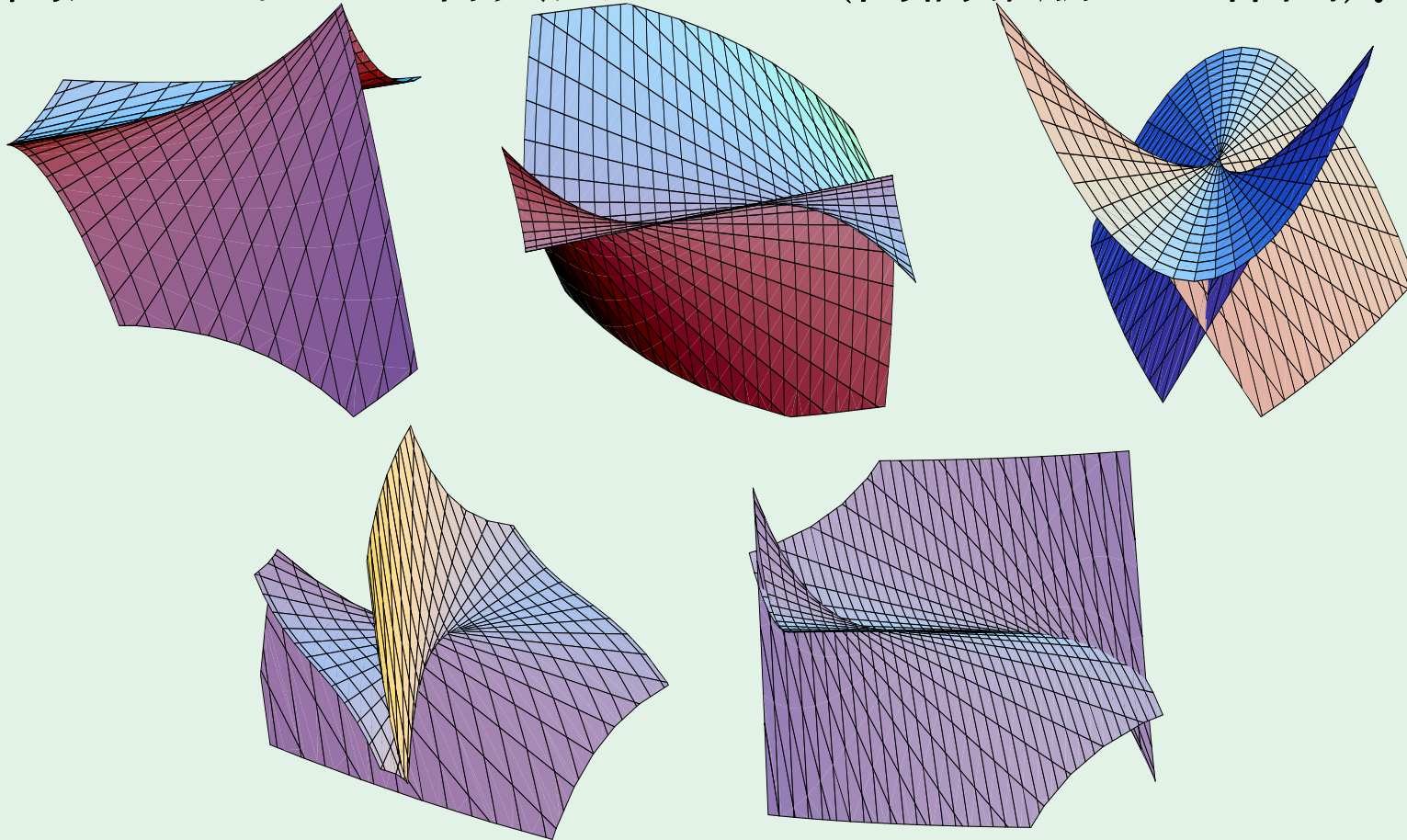
ユークリッド幾何

球面幾何, 双曲幾何, 射影幾何, 共形幾何, ...

ミンコウスキー幾何, ...

固有の対称性がある.

下図は、射影接触幾何 $G = \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^4)$ やリー球面幾何 $G = O(2, 3)$ などと関連して現れる特異点である (高橋雅朋さん作画).



上段左から cuspidal edge, Mond surface, swallowtail,
下段左から generic folded pleat, Shcherbak surface

— Goo Ishikawa, Yoshinori Machida, Masatomo Takahashi, *Asymmetry in singularities of tangent surfaces in contact-cone Legendre-null duality*, *Journal of Singularities*, **3** (2011), 126–143.

— Goo Ishikawa, *Singularities of tangent varieties to curves and surfaces*, *Journal of Singularities*, **6** (2012), 54–83.

【 右 G -左同値 】

空間 M に群 G が作用しているとする. $G \subset \text{Diff}(M)$ 部分群.

$f : N \rightarrow M, g : N' \rightarrow M, p \in N, q \in N'$ について, f_p と g_q が **右 G -左同値** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \sigma \text{ local diffeo}, \exists g \in G, \text{ such that}$

$$\begin{array}{ccc} (N, p) & \xrightarrow{f} & (M, f(p)) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow g \\ (N', q) & \xrightarrow{g} & (M, g(q)). \end{array}$$

が可換.

【 ジェネリック幾何 】

かのポアンカレが「科学と方法」で書いているように，まず調べるべき対象は，しばしば現れる対象，すなわちジェネリックな対象である。（セレブの研究ではなく，大衆の研究。）

近似定理，横断性定理，...

ちなみに，generic の日本語訳は「普及」がよい。ジェネリック医薬品は，普及医薬品，ジェネリック特異点は，普及特異点...

【 分類問題と認識問題 】

特異点論には，分類問題と認識問題がある．この2つの問題：ある特異点の集まり全体をある基準（同値類）にしたがってクラスに分けること（**分類問題**）と，1つの特異点がどのクラスに実際に属するのかを判定すること（**認識問題**）とは，別問題である．

分類問題では，特異点の表示を同値関係によって変形していったって，いくつかの“標準形”にクラス分けする．分類結果は，分類を完結してはじめて明らかになる．この時点では，与えられた特異点がどのクラスに属するかは，その分類の過程を追っていかないとわからない．

認識問題は，分類結果を基に，そのクラスのわかりやすい判定法を与える．判定法があれば，与えられた特異点が実際にどのクラスに属するかが簡単にわかる．

たとえば、探検家が見つけた山道のルートを舗装して車で
行けるようにすることである。

たとえば、伊能忠敬 (1745–1818) や間宮林蔵 (1780–1844) が
挑んだのが分類問題 (北海道の発見) で、



北海道新幹線を開通させる (2016) のが認識問題である. 誰にでもできる判定法がよい. (佐治さんの講演)



【 特異点の判定法 】

空間に幾何学的対称性 G があるとき，曲線や曲面の右 G -左同値類のまま，(形を壊さないで) 微分同相類 (右左同値類) が判定できるとよい．そうすると，その特異性の微分幾何学的な性質が調べやすくなる．

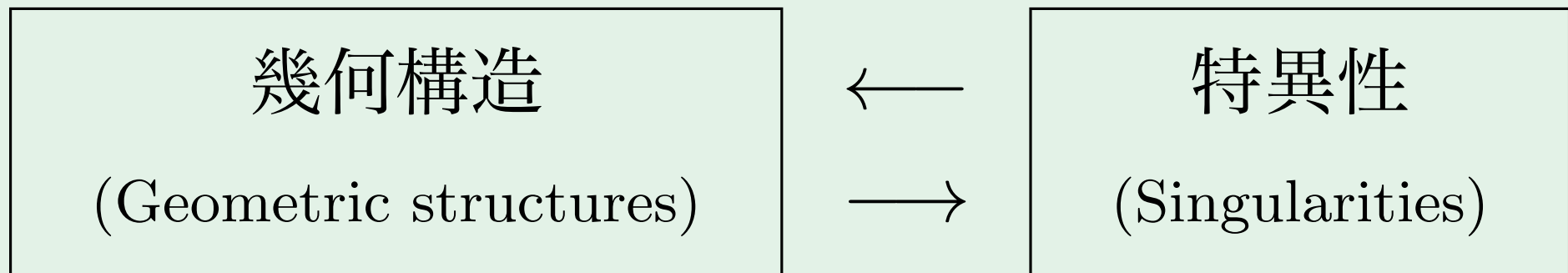
よい判定法は，いわば“非破壊検査”のようなもの．

【 幾何学と特異点 】

幾何学において，どのような特異点が生じるか求めよう．

さらに，その特異点を持つ幾何学的な構造を求めよう．

特異点論を展開し，幾何学をさらに広く深く発展させよう．



Thank you for your attention.

出会い, 別れ, そして巡り会い