幾何学特論２ / 幾何学講義２　レポート問題

担当　石川 剛郎 (北大・理)

次の全１０題の問題族から**３題を選択**して詳しい解答を付けて提出して下さい.
提出先：講義時に直接提出，または，数学事務室前のこの講義用のレポートボックスへ.
最終締めきり：２００５年７月２９日（金）正午.

提出されたレポートは**添削**します．解答に誤りがあったり，無駄なことが書いてあったり，論理の流れが不明確だったり，説明が不十分と判断される場合などは,「書き直し」を求めます．その場合は紙を換えてきれいに書き直してレポートを**再提出**してください．**書き直しを求められて再提出をしないと不合格**になります．なお，レポートは**手書き**に限ることとします. (理由：自分で考えた丁寧な解答を手書きでゆっくり書いていくと考えが整理されてきて楽しいから）．従って，書き直しの時間を考慮して，レポートは早めに準備して**早めに提出**してください.

問題１．$M = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1, \|\boldsymbol{y}\| = 1, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0\}$ が $\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^{2n+2}$ の $(2n-1)$-次元部分多様体であることを示せ．ただし，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ は標準内積で，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ である．(M は S^n 上の unit tangent bundle である).

問題２．N, M を可微分多様体で，$\dim N \geq \dim M$ とする．可微分写像 $f : N \to M$ と点 $x_0 \in N$ に対し，次の２つの条件が同値であることを示せ.
(1) f は点 x_0 でしずめ込み (submersion) である.
(2) すべての可微分曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $c(0) = f(x_0)$ $(\varepsilon > 0)$ に対し，可微分曲線 $\tilde{c} : (-\delta, \delta) \to N$, $\tilde{c}(0) = x_0$, $(\delta > 0)$ があって，$f \circ \tilde{c} = c$ が成り立つ.

問題３．（$\mathbf{R}^n$ 上，または n 次元多様体の座標近傍上で定義された）可微分関数 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ について，点 $\boldsymbol{x} = a$ が非退化臨界点 (non-degenerate critical point) である，という条件は，座標変換 (右同値) に関して不変な性質であることを示せ.

問題４．可微分関数 $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ について，臨界点 $\boldsymbol{x} = a$ でのヘッセ行列 $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)(a)$ が正定値 (positive definite) ならば，f は $\boldsymbol{x} = a$ で極小 (minimal) であることを，モースの補題 (Morse's lemma) を用いて示せ.

問題５．$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を C^∞ 級写像，$\rho:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を C^∞ 写像で，$\mathbf{R}$ のあるコンパクト集合の外では恒等的に値 0 をとるものとする．r 次以下の１変数多項式全体 $P(1,1;r)=\mathbf{R}^{1+r}$ にはユークリッド空間としての位相を入れ，$C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ にはホイットニー C^∞ 位相 (Whitney C^∞ topology) を入れておく．このとき，写像
$\varphi: P(1,1;r)\to C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}), \varphi(e)(x):=f(x)+\rho(x)e(x), (e\in P(1,1;r), x\in\mathbf{R})$
は連続写像であることを示せ.

問題６．C^∞ 関数芽 $f:(\mathbf{R}^n,a)\to\mathbf{R}$ と $g:(\mathbf{R}^n,a)\to\mathbf{R}$ について，f が 右同値 ($\mathcal{R}$-同値ともいう) に関して r-確定 (r-determined) で，$j^rg(a)=j^rf(a)$ ならば，g も右同値に関して r-確定であることを示せ.

問題７．次の C^∞ 関数芽 $f:(\mathbf{R}^2,0)\to\mathbf{R}$ について，右余次元 $\mathcal{R}$-codim(f) とミルナー数 $\mu(f)$ を計算せよ．ただし，

$$\mathrm{codim}(f):=\dim_{\mathbf{R}}\frac{m_2}{\left\langle \dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right\rangle_{\mathcal{E}_2}},\qquad \mu(f):=\dim_{\mathbf{R}}\frac{\mathcal{E}_2}{\left\langle \dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right\rangle_{\mathcal{E}_2}}$$

であり，ここで，$\mathcal{E}_2=\{h:(\mathbf{R}^2,0)\to\mathbf{R}\ C^\infty\text{関数芽}\}$, $m_2=\{h\in\mathcal{E}_2\mid h(0,0)=0\}$ であり，$\left\langle \dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right\rangle_{\mathcal{E}_2}$ は，$\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ が $\mathcal{E}_2$ で生成するイデアル (ideal) である.
(1) $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$, (2) $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^3$, (3) $f(x_1,x_2)=x_1^3+x_2^3+x_1x_2$.

問題８．平面曲線芽 $f:(\mathbf{R},0)\to(\mathbf{R}^2,0)$ について，$\dfrac{df}{dt}(0)=0$ であり，$\dfrac{d^2f}{dt^2}(0)$ と $\dfrac{d^3f}{dt^3}(0)$ が１次独立ならば，f は，$t\mapsto(t^2,t^3)$ と右左同値 ($\mathcal{A}$-同値ともいう) であることを示せ.

問題９．可微分関数 $f:S^1\to\mathbf{R}$ の臨界点は２個以上あることを示せ．また，モース関数 $f:S^1\to\mathbf{R}$ の臨界点の個数は偶数であることを示せ.

問題１０．$f_t:N\to M$ を可微分写像の族，α_t を M 上の微分形式の族，$X_t=\dfrac{df_t}{dt}$ とおくとき，$\dfrac{d}{dt}(f_t^*\alpha_t)=L_{X_t}\alpha_t+f_t^*\dfrac{d\alpha_t}{dt}$ が成り立つことを示せ．ただし，L はリー微分 (Lie derivative) を表す.

以上.