線形代数学 II 質問に対する回答

No. 3 (２００５年１２月１９日の分) 担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しましたが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，**直接質問してください**．文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．なお，回答書は，
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html に掲載予定です．参考にしてください．

問．固有値を求める意義とは何ですか？// 複素数の範囲で考えて不変な直線がどのようになるか調べると，何に応用することができるのですか？// 固有値の利用価値は何ですか？// 将来使ったりするのでしょうか？それがわかるとやる気が出るような気がするので教えてください．

答．かなり遅くなりましたが，あけましておめでとう．(前回１２月２６日の授業で回答書を配布予定だったのですが，プリンターの調子が悪く，今日配布することになりました．悪しからず．さて，回答ですが，固有値は，線形変換（正方行列で表現される変換）を解析するための一番大切な概念です．もともと固有値は線形変換の解析のためにあるわけですが，それ以外でも，たとえば，量子力学のような，現代科学で不可欠な理論の基礎になっています．量子力学では，線形変換（この場合，線形作用素とも言います）は直接観測できないけれど，固有値という数値なら観測できる，という理論があります．量子力学は，現代社会でなくてはならない技術の基礎理論なので，そういう意味で実生活で普段意識していないかもしれませんが，非常に役立っています．皆さんが，固有値を将来直接に使ったりするかどうかは，私 (石川) は予言者ではないので知りませんが，とにかく重要であるのは確かです．

問． n 次正方行列の固有方程式 $|tI - A| = 0$ が n 次方程式になるのは絶対ですか？

答．絶対です．行列式の定義を思い出すと，t の n 次の項は，ただ１つ，対角線の部分の積からしか出てこないので，他の項と打ち消し合ったりしないで，必ず生き残るからです．

問．固有ベクトル，固有空間を求める意義がよくわかりません．//

答．固有値と固有ベクトルと固有空間は「つきもの」です．固有値の定義からして，固有ベクトルが自然に関係してきます．そして，固有値１つについて，固有ベクトルはたくさんあります．それらと零ベクトルを合わせると，１次元以上の部分ベクトル空間になります．それが固有空間です．線形変換があれば，固有値と固有空間を求めることで，その線形変換を調べてその本質にせまる，というのがセオリーです．

問．固有値と固有ベクトルを**複素数**の範囲で考えなくてはならないのはなぜですか？

答．固有方程式は代数方程式なので，その解は，一般には複素数として求められるからです．たとえば，正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有方程式は，$|tI - A| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1 = 0$ であり，A の固有値は，実数ではなくて，$i, -i$ になります．

問．これまでやったベクトル空間の考え方や固有値などは，実数から複素数に変わっても変わらないのですか？

答．よい質問ですね．変わりません．考え方や理論が一緒です．というのは，いままでの話で，実数特有の性質は使っていなかったからです．使っていたのは，加減乗除ができるということだけで，それは複素数でも大丈夫だからです．

問．行列の固有値を求める際に，なぜ「重複度」という概念を考えるのか？数学では，同じ答えは１つにまとめてあるといった考えの方が自然な気がしてなりません．

答．確かに重複度（ちょうふくど）を考えなくても間に合うのですが，n 次方程式の解をちゃんと n 個求めたかどうかの確認のために敢えて強調することがあります．１つにまとめることもできるし，まとめないこともできる，融通が効く，というのが一番の自然体かなと思います．

問．行列の対角化をわかりやすく一言で言うならば，どういった意味なのですか？

答．一言で言えば,「行列をなるべくわかりやすく表現し直す」ということです．正方行列は，１つの線形変換の表現行列と考えられます．その表現をわかりやすく直すということが対角化です．対角行列はわかりやすいので，対角化できるとわかりやすくなるわけです．ただし，対角化できない行列もあり，その場合は，もう少し複雑な「標準形」で我慢します．補足の「ジョルダン標準形」の項目を参考にしてください．

問．正方行列 A を見ただけで対角化できると判断できないのですか？

答．できません．たとえば，初めから A が対角行列であれば，対角化できるのは見ただけでわかります

が,（$P = I$ とすればよい）．一般には，正攻法で，**固有値を求め，固有空間を求め，固有ベクトルからなる基底があるかどうか調べる**必要があります．それがセオリーです．

問． 行列の対角化の問題で，求めた基底の順番を変えたら，答えは違ってきますか？

答． はい，違ってきます固有ベクトルを並べるわけですが，結果の対角行列の対角成分には，対応する固有値が順番に並びます．たとえば，固有値が 2 の固有ベクトルを２つ並べ，その次に固有値が 1 の固有ベクトルを１つ並べて行列 P を作ると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となりますが，固有値が 1 の固有ベクトルを１つ並べ，その次に固有値が 2 の固有ベクトルを２つ並べて P を作ると，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となります．

問． 対角化可能判定条件がよくわかりません．// なぜ，固有空間の次元の総和が n なら対角化できるのですか？// n 次正方行列 A に関する４つの条件 (1) A を対角化できる．(2) A の固有ベクトルだけからなる基底がある．(3) A の固有空間の次元の総和が n．(4) A の固有空間の直和に $\mathbf{C}^n$ が分解する（実数の範囲で考えられるときは，$\mathbf{R}^n$ が分解する）が同値であるということについて詳しく教えてください．

答． 固有空間の次元の総和が n になる状況であれば，固有ベクトルからなる基底が見つかり，それを並べて正則行列 P を作れば，自動的に $P^{-1}AP$ が対角行列になります．逆に対角化できるなら，固有ベクトルからなる基底があるし，固有空間の次元の総和は n になります．したがって，(1), (2) , (3) の条件は，皆同じ条件（お互いに必要十分条件）であることがわかります．ところで，固有空間は，１次独立性に似た条件をみたし，固有空間の和が $\mathbf{C}^n$ を生成すれば，自動的に直和になります．したがって，(4) の条件も，他の (1), (2) , (3) のどの条件とも同値であることがわかります．おしまい．

問． 対角化可能条件の４つの条件が「お互いに同値」とはどういうことですか？

答． お互いの条件が必要十分条件になっているということです．ですから，対角化できるかどうか調べるとき，どの条件を使ってもよい，ということです．

問． 複素行列と実行列で，なぜ対角化可能判定条件の定理が分かれているのですか？

答． A が実行列のとき，実数の範囲で対角化できるなら，その方がわかりやすいからです．対角化可能かどうか調べるときには，固有値を考えるので，通常，複素数の範囲で考えるわけですが，もし固有値がすべて実数のとき（つまり，固有方程式 $|tI - A| = 0$ の解がすべて実数のとき）は，固有空間も実数の範囲でも考えることができるので，実数の範囲で対角化できるかどうか，つまり，対角化する正則行列 P が実行列にとれるのかどうか，ということが議論できるわけです．

問．「$P^{-1}AP$」は，ある部分空間から，まったく同じ部分空間に写す時の表現行列という意味と考えて良いのですか？

答． その通りです．定義域と値域で同じ基底をとって，表現します．

問． 部分空間の**直和**がさっぱりわからないです．

答． 直和でイメージしてもらいたいのは，たとえば，３次元空間 $\mathbf{R}^3$ の水平な x_1x_2-平面と垂直な x_3-軸です．イメージしてください．３次のベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ は，みごとに $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と分解されます．分解の仕方も一通りです．このとき，$\mathbf{R}^3$ は $L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \text{は任意のスカラー} \}$ と $M = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \text{は任意のスカラー} \}$ の直和であると言います．分解は２つでなくても，３つでも良いです．今度は，x_1-軸と x_2-軸と x_3-軸をイメージしてください．$\mathbf{R}^3$ は，この３つの部分空間の直和です．実際，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と一通りに分解されます．直和とは，上のような場合以外でも斜めの方向に同様な分解を考えるための概念です．ところで，幼なじみのことを「直和の友」と言います，というのはウソですが，それぐらいなじんだ感じで理解できるとよいですね．

問．「n 次のベクトルが固有空間たちの和に表される」という表現は,「L に属するベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が L の生成系である」という表現と似ていると思うのですが．

答． はい，似ています．実際，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が L の生成系であるときに，$L_1 = \langle \boldsymbol{a}_1 \rangle, L_2 = \langle \boldsymbol{a}_2 \rangle, \ldots, L_r = \langle \boldsymbol{a}_r \rangle$ とおくと，L は $L_1, L_2, \ldots, L_r$ の「和」になります．さらに，１次独立条件に似た条件（和に表す表し方が一通り）が満たされていれば,「直和」と言います．

問． $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0}$ という条件が導かれましたが，この性質が１次独立の条件に似ているには何か理由があるのでしょうか？

答． はい，理由というより，つながりがあります．実際，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が１次独立であるとき，$L_1 = \langle \boldsymbol{a}_1 \rangle, L_2 = \langle \boldsymbol{a}_2 \rangle, \ldots, L_r = \langle \boldsymbol{a}_r \rangle$ とおいてみると，$\boldsymbol{x}_1 = c_1\boldsymbol{a}_1 \in L_1, \boldsymbol{x}_2 = c_2\boldsymbol{a}_2 \in L_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r = c_r\boldsymbol{a}_r \in L_r$ に対して，$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0}$ とおくと，それは，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ ということなので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が１次独立だから，$c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$ となって，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0}$ が導かれる，というつながりがあります．

問． 行列の対角化は何に応用するために考えるのですか？// 対角行列にはどのような性質があるのですか？

答． いろいろ応用できます．なぜ応用できるかというと，対角化すると，その行列の性質が浮き彫りになるからです．たとえば，対角行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ は，x_1-軸方向に 2 倍，x_2-軸方向に 5 倍，x_3-軸方向に -1 倍するという変換です．性質がよくわかります．対角化して，この行列になったとすると，ある３つの独立な方向があって，１つの方向には 2 倍，２つ目の方向には 5 倍，３番目の方向には -1 倍する変換であるということがわかるわけです．具体的な応用例としては，講義でも時間があれば説明しようと思っていますが,（たぶん時間がなくて説明できないとは思いますが），たとえば,「フィボナッチ数列」の一般項を求めることに応用できます．フィボナッチ数列というのは，$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots,$ という数列です.「黄金比」をつかって一般項が書けます．それはともかく，複雑なことを単純にわかりやすくして理解しておくと，応用が自ずとついてくる，という感じです.（人のために働いていると，自ずとまわりの皆が助けてくれるようになる，というのと似ています）.

問． A^n を求めて何に利用することができるかが分かりません．// 自分は，行列は連立方程式と考えており，そこで A^n とは連立方程式を n 乗したものだと考えると意味がよくわかりません．

答． 行列は，連立方程式に登場しますが，また，線形写像を定めるという側面も重要です．A が正方行列の場合，線形変換（定義域と値域が一致する線形写像）を定めます．A^2 は，A の定める線形変換を２度繰り返すことに対応します．A^n は，n 回繰り返すことに対応します．このように，線形変換を繰り返していったときどうなるかを調べる分野を「力学系」と言います．いろいろな応用があり，重要な分野です．

問． $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ のとき $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$ は自明のものとしていいんですか？

答． 自明ではないですが，簡単にわかることなので，説明を省略しました．確かに，厳密には，数学的帰納法で証明することです．ただし，他にも，もっと難しくて自明でないことがある場合，やはり，説明する優先順位というものがあります．**比較的難しいことを優先させて説明し，簡単なことは説明を省略したり，短縮したりする**わけです．どんなことにもあてはまります．そして，この優先順位がよくわかるようになるためには，その内容を十分理解している必要があります．ということで，説明の優先順位がわかるよう，引き続きよく勉強してください．

問． $A = PDP^{-1}$ のとき，$A^n = PD^nP^{-1}$ とできるのはなぜですか？行列は，左からかけていくはずでは？

答． 行列のかけ算は，普通の数と同じように,「結合律」が成り立つので大丈夫なんです．つまり，$(AB)C = A(BC)$ が成り立ちます．行列の順番は変えてはならないのですが，どれとどれを先に掛けるか，は気にしなくてよいのです．

問． 対角化できない行列だと A^n は求められないのですか？

答． 求められる場合もあります．たとえば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は，対角化可能ではないですが（それを確かめてみてください），A^n の式は求められます．$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ です．ともかく，対角化できる場合は特に簡単にわかる，ということです．

問． 今まで学んできたことは，この対角化のためにあるものなのですか？

答． なるほど，そう言えるかも知れません．いろいろ学ぶと，対角化を含めたたくさんのことがわかる，

ものを知れば知るほど，世界が拡がる,（ものを知らないと世界が拡がらない）ということですね．

問．トレースを求めることの利点は何ですか？

答．トレースで固有値の総和がわかります．行列式は固有値の”総積”です.（この場合，重複度もこめています）．トレースは，行列式と並んで，正方行列から取り出せる重要な数値です．

問．なぜ，線形変換が線形写像と特に区別されて扱われるのですか？固有値のような考え方は線形写像にはないのですか？

答．線形写像という大きな枠組みのなかで，とくに線形変換を特別に扱っています．固有値は，同じ空間内での線形写像についてだけ考えられるので，そういう状況以外では，線形写像に固有値は考えません．

問．V から V 自身への線形写像という表現は，自身への，という言葉があると，変化していないように感じるが，単に，次元数に変化がない，ということだけを意味することになるのか，それとも本質的に変わらない（前 $V =$ 後 V）ということなのかわかりません．

答．良い質問ですね.「前 $V =$ 後 V」という状況です．空間としてはまったく同じ空間と考えています．その同じ空間内で，線形変換 $f : V \to V$ は，個々のベクトルを変換している，ということです．１つの空間内で変換しているということです．

問．f-不変な部分空間を定義したわけは何ですか？

答．線形変換をより良く理解するためです．固有値や対角化の話を理解しやすくするために導入しました．

問．不変な部分空間と固有空間とは全然別のものですか？

答．全然別のものではありません.「固有空間は不変な部分空間」です．逆は言えません．つまり，不変な部分空間がいろいろたくさんある中に（ある固有値に関する）固有空間もある，ということです．

問．固有値の値は有限個で不連続な値なので，f-不変な直線は不連続になるということですか？

答．直線自体は連続です．また，固有値は有限通りですが，不変は直線は，連続無限に存在する場合があります．たとえば，極端な例ですが，$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ の場合，原点を通る直線は,（その傾きをもっていても）すべて不変な直線になります．

問．演習問題の固有空間の基底を求めるとき，基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となりましたが，$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ としてはいけないのでしょうか？

答．全然いけなくないです．どちらも基底だから，どちらも正しい答えになります．基底の取り方は一通りではない，ということを思い出しましょう．

問．$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ の成立条件が良く分かりません．

答．$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の１次結合で表される，という条件です．このとき，$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} \rangle$ $= \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ になりますが，そうでないとき，つまり，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の１次結合で表されないとき，$\boldsymbol{b} \notin \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ であり，$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle \subset \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} \rangle$ であり，次元は１だけ増えます：$\dim\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} \rangle = \dim\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$.

問．$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ と表すと，$A = \lambda I$ ということになりますが，実感がわきません．なぜそう言えるのでしょうか？

答．固有値の説明での $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ は恒等式の意味ではないので，$A = \lambda I$ ということにはなりません．

問．行列の行（列）基本変形をする前とした後では，何が共通で，何がそうでないのかわかりません．基本変形する前と後では，イコールにはならない，ということはわかるのですが，全く別のものというわけではないと思います．

答．階数が共通です．行基本変形に限れば，$A\boldsymbol{x} = 0$ という方程式の解空間が変わりません．でも，行列自体は変形されて形が（成分が）変わります．

問．ファンデルモンドの行列式が $\det P = \prod_{1 \leq i < j \leq s} (\lambda_j - \lambda_i)$ になぜなるのかわかりません．$\prod$ の記号の意味もわかりません．

答．講義では直接は扱いませんでしたが，１学期のテキストに説明してあります.（基本変形を応用して計算できます）．$\prod$ は積（かけ算）の記号です．$\sum$（総和の記号）の類似物です．たとえば，$n! = \prod_{1 \leq k \leq n} k$ と表されます．

さて，１年間つきあってくれてありがとう．来週の期末テストでも実力を発揮してください．では，さようなら．