線形代数学 II 質問に対する回答

No. 2　(２００５年１１月１４日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しましたが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してください．それから，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．なお，回答書は，
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html に掲載予定です．参考にしてください．

問．「像は $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ と表されるベクトル $\boldsymbol{y}$ の全体」という意味がわかりません．つまり”全部”ということですか？

答．全部であるとも限りません．行列 A に依存します．たとえば，極端な話，$A = O$（零行列）だとしたら，$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ と表されるベクトル $\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{y} = O\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$（零ベクトル）だけですね．$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と列ベクトル表示し，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$ と表され，$x_1, \ldots, x_n$ は任意なので，結局，$\boldsymbol{y}$ は「$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ たちの１次結合の形で表示できるベクトル」に限定されます．つまり，$\mathrm{Im}(f) = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$（$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ で生成される部分ベクトル空間）です．

問．$\mathrm{Im}(f)$ の基底の求め方がわかりません．// 線形写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ の像の基底を求めるのに，A を行基本変形して階段行列にするのはなぜですか？// A を必ず階段行列にしなければいけないのですか？

答．線形写像を表す行列 A の列ベクトルたち $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ から，**１次独立な組を最大限，目一杯多く選び出す**，という方法です．最大限多く選んだら，それらは１次独立な $\mathrm{Im}(f)$ の生成系，つまり $\mathrm{Im}(f)$ の基底になるからです．そして，行列 A のままでは，１次独立な組を最大限多く選べないので，選びやすなるように階段行列に変形して判定します．ですから本来の目的からすると，最後の質問にあるように，完全に階段行列まで変形する必要がない場合もあります．その前の変形の段階でわかる場合もあります．その場合は，そこまでの変形でわかるという説明が（”ひとりよがり”に陥らないために）必要になります．(授業や教科書では，話をはっきりさせるために階段行列まで完全に変形して説明しています)．

問．プリント No.5 の解答例で，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ を使って $\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ を表していましたが，逆に $\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ を使って $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ を表してはダメなのですか？// $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は１次独立と断っていましたが，１次独立でないとまずい理由は何ですか？

答．ダメではありません．でも，階段行列まで変形してわかりやすくしているので，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ を使って $\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ を表す方がずっと簡単です．また，１次独立であると断るのは，基底であることを示すためです．基底は「１次独立な生成系」だから，１次独立という条件が必要です．

問．$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ が１次独立だからといって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が１次独立であるといえるのでしょうか？

答．言えます．それがキーポイントです．行列 A から B へは，行基本変形で変形しているだけなので，ある関係式 $x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ が成り立つことと同じ型の関係式 $x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{0}$ が成り立つことが同じ条件になります．したがって，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ が１次独立とわかったら，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$ とおいてみると，$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ も成り立つので，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ の１次独立性から $c_1 = 0, c_2 = 0$ が導かれるので，結局，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ も１次独立であることがわかります．

問．行基本変形をして $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のときは，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ だけですが，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のときは，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の３つになるということですか？

答．その通りです．B の形を見て判断します．

問．$\mathrm{Im}(f)$ の基底をとるとき，行基本変形した答えに，１次独立である列が複数ある場合はどうしたら良いのですか？

答．基底の選び方は一通りではありません．したがって，「$\mathrm{Im}(f)$ の基底を求めよ」に対する正しい答えはたくさんあります．授業で説明したのは，その正しい答えを見つける正攻法（= 成功法）です．正攻法以外も正解を導くことがありますが，その場合は，その方法が正しいという説明が必要になります．(１次独立な列が選べたとして，それが最大個数かどうかの説明が必要)．

問．$\mathrm{Im}(f)$ の基底が行列 A の列ベクトル（の一部）で表されるのはなぜでしょうか？

答．$\mathrm{Im}(f) = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ なので，生成系という条件をみたしたままで，１次独立な組を選べるからです．

問．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が基底であることをそういう過程で書いたらよいのかわかりません．次元の求め方もわかりません．

答．階段行列 B が求まり，その形で判断した後，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が１次独立であることを（行列 B を使って）説明し，他の列ベクトルたちが，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の１次結合で表されることを（行列 B を使って）説明して，基底であることを示します．次元は基底に必要なベクトルの個数なので，この場合は 2 です．

問．$\mathrm{Ker}(f)$ の基底の求め方がわかりません．// $\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$ ということと $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ という行列はどう関係しますか？

答．$\mathrm{Ker}(f)$ は，定義によって，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間なので，前期に説明した方法ですが，$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の方を解けばよいので，それを解いています．

問．A が $m = n$ の $m \times n$ 行列で正則なら，$\mathrm{Ker}(f)$ の基底はどうなるのですか？

答．良い質問ですね．$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{0}\}$ であり，この場合は基底（１次独立な生成系）はありません．次元は 0 と考えます．基底が 0 個のベクトルから成る，とみなすわけです．$\dim(\{\boldsymbol{0}\}) = 0$ です．

問．核と像の相互に関係性はあるのですか？

答．次元について関係があります．線形写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ について，$\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(f))$ が成り立ちます．

問．$\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(f))$ の証明の説明がよくわかりません．

答．$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = s$ は $\mathrm{Ker}(f)$ の次元，つまり $\mathrm{Ker}(f)$ の基底のベクトルの個数です．$\mathrm{Ker}(f)$ の基底は s 個のベクトルです．$\dim(\mathrm{Im}(f))$ は $\mathrm{Im}(f)$ の次元，つまり $\mathrm{Im}(f)$ の基底のベクトルの個数です．$\mathrm{Im}(f)$ に $n - s$ 個のベクトルからなる基底が，とにかくあるよ，という証明です．

問. 線形写像の性質で $f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$ がなぜ成立するかがわかりません．

答. $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ なので，$f(c\boldsymbol{x}) = A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$ となります．

問. 行列 A を行基本変形で階段行列 B にしたとき，$B = PA$ となるという P に関して詳しく説明してください．

答. A が $m \times n$ 型行列のとき，P は m 次正則行列です．行基本変形１回は,「基本行列」（m 次正則行列の一種）を１個左から A に掛ける，という操作で表現されます.（線形代数 I の「基本行列」の項目を参照）．行基本変形をもう１回すると，基本行列がもう１個，左から掛かります．階段行列 B にするまで，何回か変形を続けていきますが，それに応じて，基本行列が数個，左から掛かります．その数個の基本行列どうしを掛けたものが P です．

問. 行基本変形などで間違っていないか確認する方法はありますか？

答. あります．間違いやすそうな変形をした場合，逆に行基本変形で戻れるかどうか暗算で確かめるとよいです．

問. $\mathrm{rank}(A|\mathbf{0})$ の意味がわかりません．

答. A の列たちの右端にもう一列零を縦に並べます．そうしてできる行列です．階数は，もともとの A と変わりません．

問. ”写像” と ”うつす” の意味がわかりません.「X の各要素 x に対し，それぞれ Y のただ１つの要素 y を対応させる対応規則を X から Y への写像という」とのことですが，線形写像において，X が核で，Y が像ということでよいのですか？

答. 「写像」は，もともと，映像などを写す，という意味あいの言葉です．その場合，X は，実物のことで，Y はスクリーンを意味します．実物（できれば半透明な物体をイメージしてください）の各点が，スクリーンの上に写っている，ということです.「写す」とも言うし,「移す」とも言います．線形写像の例としては，X がまっすぐなもの（空間全体や平面や直線など）で Y もまっすぐなもの（歪んでいないスクリーン）で，スクリーンに垂直な平行光線で写す場合を考えると分かりやすいと思います．そして，スクリーンには１点しるしがついていると思ってください．それが零ベクトルと思ってください.（空間の原点がそのしるしに写っているとします.）そのとき，核は，そのしるしに写されるような，実物の部分です．像はまさに，写された像のことです.（たとえば，X が空間全体なら，この場合は，核は，しるしを通る直線で，スクリーンに垂直なものになるし，像はスクリーン全体になります．X がスクリーンと垂直な平面の場合は，やはり核は，しるしを通る直線で，スクリーンに垂直なものになりますが，像は，スクリーン全体にはならず，しるしを通るスクリーン上の直線になります.）もちろん，線形写像にもいろいろあるので，正確には定義どおりに考えていくことになります．

問. 高校のとき,『$x, y \in \mathbf{R}$, $x + y = X, xy = Y$ のときの X, Y の存在範囲』のような問題があって，X, Y の存在範囲が像だ，と習ったと思うのですが，これも写像の考え方なのですか？

答. その通りです．この場合は，線形写像ではなく，”非線形写像”ですが.

問. 線形写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ について，n, m の大小で難易がつく，というイメージは正確でしょうか？

答. 難易というと，次元以外の要素も関係するので何とも言えません．たとえば，$n > m$ の場合，必ず $\dim(\mathrm{Ker}(f)) > 0$ ですが，$n \leqq m$ の場合は，$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ の場合が多いですが，$\dim(\mathrm{Ker}(f)) > 0$ となることもあります．

問. 線形写像 $f : V \to W$ という関係は視覚的な意味を持ちますか？たとえば，入力が３次で，出力２次のような次元が異なる場合は，ベクトルをどのように動かしていくのかイメージできません．// 線形写像を図で表す事はできますか？

答. 視覚的な意味を持ちます．移動するというより，影を写す，というイメージも加味すると良いと思います．図示できます．$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ について，$n \leqq 3, m \leqq 3$ ならは可能です．それ以上の次元の場合は，それなりの工夫をして，想像力をかき立てるようにしないと無理です．

問. 部分空間 L の基底の数を，なぜ次元と呼ぶのですか？本来一般的に定義される次元とは厳密に異なるのではないでしょうか？

答. 同じです．というか,「本来一般的に定義される次元」というものがありません．物理学などで通常使っている「次元」という言葉には，曖昧さがあり，明確には定義されていません．それを明確に定義するために，基本にさかのぼっていくと，授業で定義した「基底の個数」というものに行き着くのです．

問. 線形写像とコンピューターは関係ありますか？

答. あります．ただし，コンピュータ君は,「線形写像」という抽象的な概念はまったく理解できない（理解する気がない）ので，仕方なく，行列（数字のリスト，数式のリスト）を使って，計算を指示してあげます.「線形写像」を知る必要があるのは，コンピュータを指示する，あるいは,（コンピュータに指示されないように）コンピュータがどういう計算をしているかを理解する，人間の方です．

問. 商ベクトル空間という概念がわかりません．

答. たしかに難しい概念ですね．わかると非常に役に立ちます.（補足では，抽象的な「ベクトル空間」を導入していますが，それを導入するのは，商ベクトル空間を考えたいから，と言っても言い過ぎではないと思います）．でも，まず本文を最後まで十分理解した後で，補足の部分に進むことをお勧めします.（それまでは，参考程度に気楽に読む.）

問. 線形写像の特別な意義，特別に学ぶ意味がわかりません．実践的にどのように利用されるかを知った上で学びたいです．

答. 学んでいるうちに徐々にわかってきます．と答えたいところですが，それまで待てないという皆さんのために少し説明します．さて，実践的，といっても個人個人によって，何が実践的か，ということは違ってきます．皆さんがどういう進路に進むか，皆さんがどういう生活を実践していくかは，私 (石川) にはわかりません．皆さん自身にとっても予測不可能でしょう．そこで，将来たぶん役に立ちそうなこと，あるいは，役にたつことを自分で調べて理解できるようになること，それを要領良く教わりたい，ということになります．要領良くということは，個々の，こまごまとした知識を教わる，ということではありません．それは要領悪い教わり方ですね．覚える労力の割に適用範囲がきわめて狭いからです．そんな知識は，必要になってから，その場で覚えれば間に合う．むしろ，方法，なるべく一般的な方法を教わる方が要領良いですね．でも，せっかく教わった方法も，社会の変化が激しいので，すぐ役に立たなくなるかもしれません．もっと大事なのは，そういう方法の背景にある「考え方」を理解する，大げさにいえば,「世界のしくみ」を教わることです．それが，一番要領良い教わり方です．もちろん，１つの授業で，世界のしくみのすべてを説明するわけにはいきませんが，特にこの講義では，この世界のうちの「数理科学の基本的なしくみ」を教わります.「しくみ」を知っていれば，あとは自力で自信を持って柔軟に実践できますね．

問. 質問書に書く内容は，講義の内容についてしかだめなのですか？講義の内容は授業を聞いていればほとんど理解できるので授業で扱わない教科書の補足の部分に対する質問も書きたいです．

答. どんどん書いてください．講義と関連する内容であれば，授業で扱う予定があろうとなかろうと関係ありません.（もちろん，講義で扱った内容がほとんど理解できている，その「ほとんど」の残りの部分を質問してもよいし，自分の理解の仕方が本当に正しいのか，質問の形で確認してくれても良いです.）教科書以外の内容でも，この講義の内容と関連させて質問してくれれば大丈夫です．要するに，皆さんが，この講義を通していろいろ考える，そのきっかけになる，それが私 (石川) の本望なのです．ではまた．