線形代数学 II 質問に対する回答

No. 1　(２００５年１０月１７日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しましたが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してください．それから，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．なお，回答書は，
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html に掲載予定です．参考にしてください．

問．部分ベクトル空間の条件の (1) 零ベクトルが L に属する (2) L に属する $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の和も L に属する (3) L に属する $\boldsymbol{a}$ のスカラー倍も L に属する，のうち，(2) が成り立ち，(3) が成り立たない，あるいはその逆のパターンは存在しますか？

答．はい，あります．たとえば，$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots \right\}$ は条件 (2) を満たしますが，条件 (3) は満たしません．また，$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 = \pm x_1 \right\}$（２直線）は，条件 (3) を満たしますが，条件 (2) は満たしません．これらは，部分空間（部分ベクトル空間）ではありません．

問．L が部分ベクトル空間であるためには，どうして零ベクトルが L に属していなくてはならないのですか？// なぜ $\mathbf{0}$ は L に属さなくてはいけないのか，わかりません．

答．条件 (3) から，もし，あるベクトル $\boldsymbol{a}$ が L に属するとすると，その任意のスカラー倍 $c\boldsymbol{a}$ も L に属します．ところが，$c = 0$ ととると，$0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ ですから，当然，零ベクトルも L に属することになります．このことを強調した条件となっています．

問．「１次結合がすべて L に属する」の意味がよくわかりません．

答．L が部分空間であって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が L に属するベクトルとします．また，c_1, c_2 を任意のスカラーとします．そうすると，条件 (3) から $c_1\boldsymbol{a}_1$ は L に属し，$c_2\boldsymbol{a}_2$ も L に属します．そうすると，条件 (2) から $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ も L に属します．したがって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の１次結合の形で表されるベクトルは皆，L に属します．３個以上のベクトルについても同様です．

問．部分ベクトル空間の概念はなぜ必要なのですか？// 部分ベクトル空間という概念は，何に利用するのですか？

答．たとえば連立１次方程式（同次形）の解空間 $L = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ は部分ベクトル空間の典型的な例です．この例を理解するだけでも，部分ベクトル空間の概念は必要だと言えます．部分ベクトル空間は線形代数の基本です．全体があれば部分がある，というのは当然のバランス感覚ですね．数ベクトル空間というものを導入しました．$\mathbf{R}^m$ と表したものです．その部分空間はもはや単純な数ベクトル空間ではなくて，その一部分ですが，ともかく「和とスカラー倍に関して閉じている」ということが重要です．その中だけで，ベクトルの足し算が自由にできる，スカラー倍が自由にできる，というが重要なポイントです．部分ベクトル空間自身も，数ベクトル空間と同じような性質をもつ，というところが重要です．

問．部分空間は直線か平面のみを表しますか？

答．$\mathbf{R}^3$ の場合は，講義で説明したように，他に $\mathbf{R}^3$ 全体や零ベクトルだけから集合 $\{\mathbf{0}\}$ も部分ベクトル空間です．また，$\mathbf{R}^4$ になると，部分空間の種類も増えます．それはともかく，部分空間（線形代数においては部分ベクトル空間のことですが）は，**図示したときに原点を通るまっすぐな図形になるもののこと**，と理解してください．

問．部分ベクトル空間は無限に存在するのですか？

答．存在します．$\mathbf{R}^3$ の部分空間の例を講義中に挙げましたが，もっと簡単な $\mathbf{R}^2$ の中でも，$L = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 = ax_1\}$ は，実数 a を決めるごとに，部分空間を定めますが，a が違えば，部分空間 L が違ってきます．このように，部分空間は無限にあります．

問．「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が L に属する $\Rightarrow$ $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ も L に属する」の $\Rightarrow$ の意味は正確にはどういう意味ですか？

答．「ならば」と読んでください．左側が前提条件で，右側が結論です．前提条件が成立している「ならば」結論も成立する，という意味です．

問．空集合とは何ですか？// 空（くう）である状態とはどういうものですか？

答．なにも無い状態です．空（から）の集合です．箱の中に何もない状態を思い浮かべるとよいと思います．雲一つない空（そら）を思い浮かべてもよいです．

問．$\mathbf{0}$ は何の記号ですか？

答．零ベクトルの記号です．何次のベクトルを扱っているかによって変わってきますが，２次の場合は $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，３次の場合は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，４次の場合は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ です．

問．$\mathbf{0}$ は空集合ではないのですか？

答．違います．$\mathbf{0}$ はベクトルです．集合ではありません．また，$\{\mathbf{0}\}$ というものもあります．これは集合ですが，空集合ではありません．箱の中に，一個だけ「零」がある，という状態を思い浮かべると良いと思います．なお，空集合は記号で $\emptyset$ で表します．たとえば，$\{\emptyset\}$ というものも考えられます．これは「空集合だけからなる集合」のことで，箱の中に空箱（あきばこ）が１個ある状態を思い浮かべると良いと思います．

問．記号 $\langle\ \rangle$ と $(\ )$ はどのような違いがあるのですか？

答．たとえば，$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ は $\mathbf{R}^2$ 全体を表し，$(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ は，この２つのベクトルの組，あるいは，２次の正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を表すという違いがあります．

問．例題で，L が $\mathbf{R}^3$ の部分空間であることを示すのに，足し算とスカラー倍を同時に行う場合は，どう説明すればよいですか？

答．説明の大筋だけになりますが，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を L から任意にとり，またスカラー c_1, c_2 を任意にとって，$c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b}$ が L に

属することを示します．

問．「$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の１次結合たちの１次結合は，展開し直せば，再び $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の１次結合になる」の意味がわかりません．

答．たとえば，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ と $d_1\boldsymbol{a}_1 + d_2\boldsymbol{a}_2$ の１次結合 $f_1(c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2) + f_2(d_1\boldsymbol{a}_1 + d_2\boldsymbol{a}_2)$ は $f_1(c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2) + f_2(d_1\boldsymbol{a}_1 + d_2\boldsymbol{a}_2) = f_1c_1\boldsymbol{a}_1 + f_1c_2\boldsymbol{a}_2 + f_2d_1\boldsymbol{a}_1 + f_2d_2\boldsymbol{a}_2 = (f_1c_1 + f_2d_1)\boldsymbol{a}_1 + (f_1c_2 + f_2d_2)\boldsymbol{a}_2$ というふう，やはり $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の１次結合の形になる，ということです．

問．「１次独立」そもそもの意味がわかりません．

答．１次独立の定義は，繰り返すと「$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ という式から $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$ が導かれる」ということです．まず，この「」をしっかり覚えましょう．文章は省略しないでそのまま覚えましょう．１次独立の意味は，**どのベクトルも，他のベクトルたちを使って，１次結合の形では表せない状態**，**無駄のない状態**のことを意味します．このことを明確に定義したわけです．なお，１次独立でないとき１次従属と言います．

問．$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ のとき，あるベクトル $\boldsymbol{a}_i (1 \leqq i \leqq r)$ がゼロベクトルだとしたら，$c_i \neq 0$ でも成り立つのではないですか？

答．そうです．零ベクトルが混じっている場合は，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は１次従属です．

問．「$\boldsymbol{a}_{r+1} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r$ とおいたとき，$\boldsymbol{a}_{r+1}$ の係数が 0 でないから，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}$ は１次従属」という所なのですが，$\boldsymbol{a}_{r+1}$ が零ベクトルのときは，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は１次独立であり，１次従属ではないと思います．

答．そうです．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{0}$ が１次従属ということです．１次独立とか１次従属というのは,「ベクトルの組」に関する概念なので，$\boldsymbol{0}$ が入っているか否かで，状況が全然違ってきます．

問．高校のとき，ベクトルの１次独立は，例えば，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の３つのベクトルがあった場合 $\boldsymbol{a} \neq 0, \boldsymbol{b} \neq 0, \boldsymbol{c} \neq 0, \boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \nparallel \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{c}$ と習い，これを満たさない場合，１次独立でないと教わりました．高校で習った定義と線形代数で習った定義の関連性を教えてください．

答．残念ながら，高校で習った条件は少し間違っています．この授業の定義が正しい定義です．たとえば，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，問題文にある条件をすべて満たしていますが，１次独立ではありません．１次独立の定義は,「$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ という式から $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_r = 0$ が導かれる」です．全世界共通です．

問．１次結合の「１次」の意味がよくわからないです．

答．「線形」という意味です．１次方程式の「１次」と同じ意味です．ちなみに，ベクトルが２次，３次，行列が２次，３次という場合の「次」とは意味が違います．

問．２次独立，２次従属などはありますか？

答．ありません．線形代数では，１次独立，１次従属しか考えません．

問．行列 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r)$ の $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ 以外の行には何が入るのですか？

答．$\boldsymbol{a}_1$ たち自身が列ベクトルなので，丁度，行列の形におさまります．

問．４次元以上の空間を考えるとどうなりますか？４次以上を考えることは，自分たちが生きているこの世界では不必要なのですか？使うとすればどのような時ですか？

答．必要です．４次元といっても，特別なものではなく，いろいろな状況で使われています．たとえば，物理学では時空は (x, y, z, t) の４次元空間です．時間を考えない場合でも，たとえば，平面上を運動する物体の状態を表すのは，位置と運動量で (x, y, p_x, p_y) の４次元空間が必要です．運動量を考えない場合でも，たとえば，平面上の２つの物体の位置を表すには，(x_1, y_1, x_2, y_2) の４次元空間が必要です．もちろん，４次元以上の空間も必要になります．統計では，多くの資料を扱うので，やはり高次元の空間が必要になります．たとえば，１００人の人の体重を表で表すと，$(w_1, w_2, \ldots, w_{100})$ の 100 次元空間が必要になります．どの分野でも，何次元でも必要になってきます．ところで，ここでは，ベクトルを行ベクトル表示していますが，この授業では，列ベクトル表示することにしています．

問．列ベクトルを使っていますが，行ベクトルで定義することはないのですか？// ただそうしようと決めただけですか？

答．そう決めただけです．便宜的なことです．だたし，途中で変えると混乱するので，一度決めたら最後まで，その取り決めに従います.（ただし，本質的な違いはまったくありません．行ベクトルも列ベクトルも，まったく同じ情報を持っています．もっと言えば，本来，行ベクトルも列ベクトルも数学的には区別できません．教育上の便宜的な用語です.）

問．$m = 4, 5, 6, \ldots,$ でもベクトル空間と言うのですか？

答．言います．これからどんどん使っていきます．

問．４次以上のときも部分ベクトル空間を考えるのですか？

答．考えます．これからどんどん使っていきます．

問．「空間」という考え方の必要性について説明してください．

答．必要というより，より高度な議論をするときに便利です．空間は英語で space，日常用語では，空いているスペース，を意味します．科学用語では，宇宙空間，というように，われわれが生活している縦横高さ３次元の空間のことを意味します．この「空間」の概念は，ないとこまりますね．自分のいる世界に名前をつけないと始まりません．しかし，３次元だけではなく，いろいろな次元の「空間」も考えると便利です．とくに数学用語で「空間」と言う場合は，非常に一般的に考えます．ベクトル空間という場合，次元に制約をつけません．$\mathbf{R}^2$ でも $\mathbf{R}^3$ でも $\mathbf{R}^4$ でも，空間とよびます．同じ理論が並行して展開できるからです．

問．１学期にやっていたことと今やっていることはつながってくるのですか？

答．すでにつながっています．ずっとつながり続けます．１学期の内容をときどき復習しながら講義を進めます．

問．後期の線形代数で一番重要となるものは何ですか？

答．皆重要なのですが，強いて言えば,「部分ベクトル空間」という概念と，あとで習う,「線形写像」という概念です．

問．板書に「正則 $\Leftrightarrow$ 行列式 $= 0$」としていましたが,「正則 $\Leftrightarrow$ 行列式 $\neq 0$」ではなかったですか ?? // プリント No.2 の解答例で,「$x_1 + x_2 + x_3 = 0$」ではなく,「$x_3 = 3x_1 - x_2$」ではないでしょうか？

答．はい，その通りです．ありがとう．間違えました．間違わないように気をつけているのですが，なかなか間違いをなくすのは難しいですね.「猿も木から落ちる」「河童の川流れ」．では，引き続きよろしく．