線形代数学 I　質問に対する回答

No. 3　(２００５年６月２０日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しましたが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してください．それから，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．なお，いままでの回答書は，http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html に載せてあります．参考にしてください．

問． 行列式は何を表しているのですか？／ $\det(A)$ が，面積，体積の拡大率とはどういう意味ですか？／ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ の理論的意味のところで，AB というのは B で変換してから A で変換する，とか，線形変換とが言っていましたが，よくわからなかったです．／詳しく教えてください．**答．** まず連絡事項を書きます．７月４日（月）の講義時間中に２回目のテストを実施します．試験時間８０分（予定）．試験範囲は，講義で進んだところまで（第４章が中心）．もちこみ不可です．よく準備して受験してください．都合の悪くて受験できない（できなかった）人は早めに申し出てください．さて，質問の回答ですが，詳しく説明しましょう．$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ を３次の正方行列とします．すると，$\det(A)$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ という３つの空間ベクトルの作る平行六面体の（向きのついた）体積を表します.（教科書の補足 C を参照）．この平行六面体は，１辺が 1 の立方体（基本単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ で作られた平行六面体）を変換したものと見なすことができます．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ に変換する．そうすると，体積が $\det(A)$ 倍になるというわけですね．その変換（１次変換，線形変換）を表す行列が A であって，その変換による体積の倍率が $\det(A)$ であるということです.（平面（２次元）の場合は，体積ではなく面積です）．さて，行列の積 AB はどう考えられるか，というと，１辺が 1 の立方体を $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ に変換し，できた平行六面体を，さらに A で変換する，その変換を合成したものを表すと考えることができます.（行列で書くと，$AB = A(BI)$ という感じです．ここで $I = E$ は単位行列）．そうすると，$\det(AB)$ が倍率の積 $\det(A)\det(B)$ に等しくなるという主張は，極めて自然であると考えられますね.

問． 行列式は何のためにあるのですか？／行列式は実際にどのような使い道がありますか？

答． 面積や体積を求めることに使います．また関連して，重積分（多変数の積分）の計算には不可欠です．また，講義で説明したように，行列の正則性の判定に使えます．また，これから説明するように，連立一次方程式の理論的な解法にも応用されます．さらに，この講義では説明しませんが，小行列式をつかって，行列の階数を求めることもできます．歴史的には，行列式の方が行列よりも先に発見され利用されました．行列式を世界で最初に発見したのは，江戸時代の関孝和（せき・たかかず）であると言われています．これは日本の誇りですね.

問． 高校までは，確か，逆行列の存在を確認するために用いたと思うのですが，一般的にもこのことは言えることなのですか？

答． 言えることです．A が正則行列 $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ です.

問． サラスの方法は２次の行列式と３次の行列式にしかあてはまらないのはなぜですか？／４次以上にはまったく計算の法則性はないのでしょうか？

答．「定義通りに計算する」ということなら４次以上でも可能です．ただし，サラスの方法のような簡単なやり方にはならない，ということです．その上で，計算の法則性というか，計算公式があります．余因子展開とかラプラス展開などと言います．講義で説明していきます.

問． サラスの方法の「サラス」とは何ですか？サラスという人ですか？

答． 人名です.

問． $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ という式がなぜ成り立つのかわかりません.

答． 行列式の定義から導かれることですが，ある行が２つのベクトルの和の形なら，行列式が２つに分解できます．３つのベクトルの和なら，行列式が３つに分解できます．上の行列式の場合，１行目が $(1,2,3) = (1,0,0) + (0,2,0) + (0,0,3)$ と分解できるので，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ と展開できます．そして，第２項は，１列目と２列目を入れ換えると，マイナスがつきます．第３項は，２列目と３列目を入れ替えると，マイナスがついて $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix}$ となり，さらに，右辺の１列目と２列目を入れ換えると，$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ となり，結局求める展開が導かれたわけです.

問． 行列式の計算で，行変形と列変形を混ぜて計算してもよいのはなぜですか？

答． 行列式の計算で，列変形が行変形と同じように使えるのは，行列を転置しても（行と列を一斉にひっくりかえしても）行列式が変わらないからです．そして，それが１回ごとの変形で成り立っています．正しい計算は，行だろうと列だろうと，続けて計算しても正しいわけです.

問． 行列式の計算で行基本変形・列基本変形の使い分けがよくわかりません．／行基本変形と列基本変形を使って，簡単な行列式に変形する時の思考回路が分かりません．

答． 少し試しに計算してみて，簡単になる変形を見つける，というスタンスです.（このプロセスは，コンピュータにはできません．コンピュータは行列式を定義通りに強引に計算してしまう．でも，人間が工夫すれば，簡単な計算法を見つけられる．そして，コンピュータを賢く使いこなせるようになる．まあ単純に知的遊戯としてもおもしろい．ともかく，そのための計算問題です）．

問． 列基本変形は必要ですか？

答． 便利です．使えるものは使うのが合理的です．行列式の計算では列基本変形も使うと便利です．だから両方使います．行基本変形だけで行列式を計算するのは，片手で相撲をとるようなものです.（ただし，連立一次方程式を解くときは，行と列の基本変形を混ぜると混乱します．サッカーで手を使っていけないようなものです．手を使ってよいのはキーパーだけ）．

問． 2行目から3行目を引き，3行目から4行目を引き，4行目から2行目を引いて，
$D = \begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ 0 & x & -x & 0 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & -x & 0 & x \end{vmatrix} = \cdots = 0$ となったのですが，どこが違っていますか？／1行目から2行目を引き，2行目から3行目を引き，3行目から4行目を引き，4行目から1行目を引くと，
$\begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & -x \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}$ となり，a が入ってこなくなってしまいました．これは解き方の間違いなのでしょうか？

答． 残念ながら間違いです．一回ごとの基本変形で行が変化していくのに，最後の変形で，古い行（もう無くなった行，いわば幻（まぼろし））を使って変形してしまっているからです．一回ごとの変形を丁寧に書いてみると間違いに気づくと思います．

問． $\det({}^tA) = \det(A)$ になる理由がいまひとつわかりません．$\det({}^tG_n(i,j;c) = 1 = \det(G_n(i,j;c)$ となるところがわかりません．

答． $\det({}^tG_n(i,j;c) = 1 = \det(G_n(i,j;c)$ ではなくて，$\det({}^tG_n(i,j;c) = -1 = \det(G_n(i,j;c)$ です．これならわかりますね．

問． 教科書 p.66 定理 4.11 の証明で，$\det({}^tF_1) = \det(F_1)$ を使っていますが，これでは，証明するはずの定理 $\det({}^tA) = \det(A)$ を用いている気がします．

答． なるほど．でも，証明で使っているのは，基本行列に関する等式 $\det({}^tA) = \det(A)$ だけですね．まず，基本行列の場合に対して定理を証明し，その次に一般の正則行列に対して定理を証明し，その次に正則行列でないものに対して定理を証明し，したがって，すべての正方行列に対して証明している，ということなのです．

問． 順列の転倒数の数え方がわかりません．$(2,3,1)$ の転倒数は $1+1=2$ ではなくて $0+1=1$ ではないのですか？

答． 3 と 1 の位置が転倒していて，さらに 2 と 1 の位置が転倒しているので，$1+1=2$ で転倒数は 2 になります．隣合っていないものも含めて転倒している対（つい）の総数を数えます．

問． 行列の1つの行が c 倍されると，行列式が c 倍されるということがわかりません．

答． 行列式の定義からわかります．それはともかく，面積や体積という行列式の意味で説明してみると，平行四辺形や平行六面体で，一つの辺だけ2倍したら，面積や体積は何倍になるか？2倍になりますね．すべての辺を2倍したら？平行四辺形なら面積が $2^2=4$ 倍，平行六面体なら体積 $2^3=8$ 倍になりますね．そういうことです．

問． $\det(A) = |A|$ というように，行列式に絶対値記号を用いるのはなぜですか？

答． 慣習です．ところで，2次以上の行列式に対して使うので，絶対値なのか行列式なのかは，一目瞭然で，紛らわしいことはまったくありません．

問．「公式」の定義は何ですか？

答．「公式」の定義はない，というのが公式見解です．定義式から導かれる等式や不等式であって，重要な式を公式と呼ぶのが慣習です．

問．「線形性」について教えてください．

答． 入力が和になれば出力も和，入力がスカラー倍になれば出力もスカラー倍になる，という性質を「線形」と言います.「線型」とも書きます．式で書くと，$f(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2) = c_1 f(\boldsymbol{x}_1) + c_2 f(\boldsymbol{x}_2)$ といった性質になります．行列の積，微分や積分などは線形性を持つ代表例です．線形でないものの例は $f(x) = x^2$ という関数です．しかしこれも，微分をつかえば局所的に線形近似ができます．それは接線を求めることです．では，ごきげんよう．