線形代数学 I　質問に対する回答

No. 2　(２００５年5月１６日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しましたが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してください．文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．

問． 基本行列とは何ですか？

答． 基本行列は基本的な行列です．基本変形を表現する行列です．３種類あって，それぞれ３種類の行基本変形に対応しています．単位行列を１回だけ行基本変形して得られる行列です．

問． 行基本変形と基本行列のつながりがよくわかりません．

答． 「ある行列に基本行列を左から掛けると，掛け算した結果が，その行列を行基本変形した結果に等しくなる」というつながりです．

問． 基本行列を考える理由は何ですか？

答． 行基本変形をして得られる結果を，行列の言葉で明確に表現するためです．応用として，たとえば「正則行列は，基本行列のいくつかの積に分解できる」というようなことが分かり，すごく便利です．

問． たとえば，①と③× 3 を入れかえたいときは，基本行列でどう表しますか？

答． 2つの変形に分けます．③× 3 をしたあとで，① ↔ ③ の変形をします．行列で表すと，$H_n(1,2)F_n(2;3)$ です．掛ける順番にも注意しましょう．

問． 基本行列について，なぜ $F_n(i;c)^{-1} = F_n(i;\frac{1}{c})$ などが成り立つのですか? 逆行列をどのようにして導き出すことが可能なのか知りません．

答． 逆行列の定義にさかのぼれば分かります. (さかのぼらないと分かりません)．質問にある式は $F_n(i;\frac{1}{c})$ を $F_n(i;c)$ に左から掛けても，右から掛けても単位行列になる，ということを意味します．

問． 行基本変形は「可逆な変形」と言うことでしたが，行を入れかえたり，行自体を加えたりしても，可逆というのが感覚的に腑に落ちないところがあるので教えて欲しいです．

答． 「可逆」と言ったのは,「取り返しがつく」という意味です．行基本変形では，方程式の情報がまったく失われない，という意味です．だから正しい答えが出てくるわけです．可逆でないことを「不可逆」と言います.「取り返しがつかない」という意味です．たとえば，方程式 $2x = 1$ を解くのに，両辺に 0 を掛けると $0 = 0$ となって，もう取り返しがつかなくなる（もう元に戻れない）わけです．不可逆です．実際，0 を掛けるのは，基本変形ではありませんでしたね．世の中には，どうも可逆なことと不可逆なことの両方があるようです．

問． どうして行基本変形は行列の積で表現されるのですか？１つの行列の中で変形を行っているだけだから，はたして積という表現を使っても良いのか疑問に思いました．

答． 行列 A が B に変形するという「操作」を，基本行列を使って，行列の「等式」 $PA = B$ で表現する，という意味です．ここで，P が対応する基本行列です．

問． 正則行列にはどのような意味があるのですか？ / 正則行列は実用的にどういう場面に使われるのですか？/ 逆行列を定義する意味がわかりません．

答． 普通の数 (スカラー) の計算で，逆数というものがなければ計算が不便ですね．それと同じで，行列計算で，逆行列という考え方がなければ不便だからです．ただし，スカラーの場合は「0 でなければ逆数がある」ということだったのが，行列の場合は「正則ならば逆行列がある」という形になるわけです．もちろん，正則かどうかのいろいろな判定法があったり，逆行列の公式があると便利なので，それらを今後紹介していきます．

問． 階段行列への変形がよくわかりません．/ 階段行列について，定義のしかたがよく理解できません．/ 階段行列の定義がいまだによくわかりません．/ 教科書では１番左の列がすべて「0 で次の列の２行目に始めて「1 がでてくるような変形をしていました．

答． 掃き出し法（行基本変形）によってできるだけ簡単に変形して得られる行列が階段行列です．階段行列は，出発点の行列で決まり，途中の変形の仕方にはよりません．たとえば，出発点の行列の第１列が零ベクトルなら，どうがんばっても，行基本変形では，１列目は零ベクトルのままです．零でない列については，零でない成分を,（行基本変形をつかって）左上の方に移動し，１に補正して，そのあとで（やはり行基本変形を使って）掃き出す，という操作をすることを考えれば，自然に定義が理解できると思います．

問． 行基本変形のコツがわかりません．/ ３種類ある行基本変形をもっと機械的に使いわけることができませんか？一番良い方法を見つけるにはどのようにしたら良いですか？/ 行の順番の入れかえるコツがわかりません．/ どの行の入れ替えをすればいいのか分かりません．見分ける方法はあるのですか？

答． はい，機械的にアルゴリズムを組むことは可能です．ただし，行基本変形をどう繰り返すしていくかには何通りもあり，正しく実行しさえすれば，どの方法でも絶対に正しい答えに到達するので，あまり気に

することはありません．でも，人間は機械とは違うので，たとえば，掃き出したい列に１が複数あったなら，なるべく複雑な割り算をしなくてもよいように，なるべく小さな数の並んだ行を上の方に移動してみると良いでしょう．人間は機械よりも (弱いけれど) 賢いので，いろいろ工夫できて楽しいわけです．

問． 行基本変形には正しい順番があるのですか?

答． 特にありません．というか，正しい順番が何通りもあります．

問． ２つの行を入れかえるのは無意味に思えてなりません．

答． 無意味というか,「当たり前の操作」と言えますね．連立式を書く順番を入れかえるだけですから．

問． 行基本変形で，２つの行を入れ替える時，必要十分はくずれませんか？

答． くずれません．

問． 「① − ③」で③が変形されることはないですか？

答． ありません．これは記号の約束ですが,「１行目を変形する，どう変形する，３行目を引くという変形をする」という意味で使います．それ以外には使わないようにしましょう.（無用な混乱を避けるため）．

問． 掃き出し法は，１回で自分の頭の中で計算できるなら，途中の計算を省いても良いですか？(ただし，説明は書く)．

答．（なるべく）省かないでください．自分がわかっていても，見ている人がわからなければ，説明する意味がないからです．途中の計算を省略すると，よほど説明を工夫しなければ，計算過程があいまいになってしまいます．途中の計算を省略するのは無用な混乱を招くので得策ではありません．

問． 行基本変形と列基本変形の違いは何ですか？/ 列基本変形はいつ使うのですか？/ 「２つの列を入れ替える」変形は，方程式を解くときに利用できますか?

答． 行の変形と列の変形の違いだけです．基本変形を右からかけると，列変形したことになります．ただし，列基本変形は，連立一次方程式を具体的に解く場合には使いません.「２つの列を入れ替える ということは，未知数を入れ替えることです．未知数が x, y なら，x を y に読み替え，y を x に読み替えることです．混乱するので，乱用しないようにしましょう.（方程式の理論的一般論を展開するときには，入れ替えた方が考えやすいこともあるわけですが）．

問． なぜ「$\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}A \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つ」と言えるのですか？

答． 係数行列を行基本変形により階段行列にすれば分ります．$\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b})$ と $\mathrm{rank}A$ は違っても１つしか違いません．つまり，$\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b})$ の方が１つだけ多い，という場合しかあり得ません．そして，その場合は，階段行列の中に，$0, 0, \ldots, 0, 1$ という行が必ず存在して，この行は，方程式に翻訳すると，$0 = 1$ という矛盾した式なので，この場合は解は存在しない，という理由です．

問． 解が無限個存在するというのは，具体的には，たとえば x_3 が任意定数のようになることをいうのですか？

答． そうです．解がいくつかの任意定数を含んだ形で書き表されるという強い結果が導かれます．

問． $\mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}A < n$ (未知数の個数 n) で解が無限にあるのはわかりますが，$\mathrm{rank}A = n$ のときに解が無限にあることはないのですか？

答． ありません．$\mathrm{rank}A = n$ ということは,「独立な式が，未知数の数だけある」ということで，解が１通りに定まります．

問． $\mathrm{rank}(A) > n$ となった場合はどうすべきですか?

答． $\mathrm{rank}(A) > n$ とはならないので大丈夫です．

問． 自明でない解とはどういうものですか？

答． $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ という解です．($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$)．

問． 行列の中にベクトルがありますが，ベクトルを行列と考えた場合の内積・外積の考え方を教えて下さい．

答． 内積については「転置」の考え方を使えば明解に説明できます．つまり，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を n 次列ベクトル ($n \times 1$ 型行列) とすると，内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ({}^t\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ です．(${}^t\boldsymbol{a}$) は行ベクトル ($1 \times n$ 型行列) であり，行列の積 $({}^t\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ が定義できるわけですね．外積については,「行列式」で明解に説明できますが，まだ行列式を説明していないので，少し待っていてください．

問． 行列は数列とも関係してくるのですか？

答． いろいろ関係します．たとえば，行列は「２重添字有限数列」と見なせます．

コメント． 少し説明が分かりにくいときがあります．/ 無理に質問を考えるのが must なのはキツいです．

コメントのコメント． コメントありがとう．なるべくわかりやすい説明をします．質問に関しては，どんな advanced な質問でもどんな primitive な質問でも (どちらの質問も大切で) 大丈夫なので，良く勉強して，講義内容に関する「想定外」の質問をしてみてください．では引き続きどうぞよろしく．