線形代数学Ｉ 質問に対する回答

No. 1 (２００５年４月２５日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しますが，回答しづらい質問には，こちらの能力の問題もあり，回答していないものもあります．もし回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問し直してください．文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．

問． 消去法と掃き出し法の違いは何ですか？// 掃き出し法はどうして必要なのですか？// 掃き出し法の利便性がわかりません．// 掃き出し法はやる意味があるのですか？// // 慣れていないせいかも知れませんが，未知数３つくらいなら，式を連立して解いたほうが速いような気がします．// 普通に連立して解けば解は出るのに，どうしてわざわざ行列を考えるのかわかりません．// どうして改めて解法を学習するかがわかりません．// 掃き出し法にしても，普通に計算しているだけだと思うのですが．連立１次方程式を解くのに，行列を用いる必要性はありますか？単に機械に教えるためなのですか？// 高校の頃に行列を学習した際に，掃き出し法などを習ったのですが，面倒臭いという思いが今も消えません．他の数学の分野でも見かけることもないし，応用が効くといった感じもしません．

答． 連立方程式の１本１本を順に使って変数の個数を減らしていくのが，**消去法**です．変数の個数が少ない場合はまだしも，変数の個数が多いと，見通し良く解くのは困難になります．それに比べて，**掃き出し法**は，与えられた連立式を並行して変形して，解を求めていく方法です．方程式に現れる係数を「掃き出し」てどんどん 0 にしていきます．この手法は（係数）行列の操作に解釈できて，見通しの良い解法が得られます．また,「解の有る無し」を理論的に考察することができる発展性のある解き方です．掃き出し法は行列の理論と結び付き，理論的に優れています．確かに，簡単な方程式なら，人間の勘に頼って解いた方が速いかもしれませんが，ここで説明することは「どんなに複雑で巨大な連立１次方程式でも解ける方法」なのです．

問． 掃き出し法の中の変形の「 (3) ２つの方程式を入れ替える」をどこで使うのかがわかりません．

答． 式の入れ替えですが，これは，次の操作をしやすくしたり，方程式を見やすい形にするための変形です．極端な例で説明すると，連立１次方程式 $x_2 = 1, x_1 = 0, x_3 = -1$ を見やすく入れ替えて $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$ とするようなことです．

問． 線形代数学とは何ですか？大学の数学は線形代数学と微分積分学に分かれていて，微分積分学は何となくわかるのですが，線形代数学というのが，どういう分野なのか，そしてそれがどういう所で必要とされるのかが知りたいです．// 線形代数学が必要となる場面はどのような分野ですか？// 線形代数学（行列）の使い道は何ですか？// 線形代数学は，数学として現実的な場面で使い道はありますか？// 行列に現実で使う場面がありますか？// 行列の果たす役割を教えてください．// 実践的には行列はどのように役立っているのですか？// 行列はどのような時に用いられるのか教えてください．行列は，やり方を覚えるだけとしか思えなくて興味を持つことができません．// 行列はどのような時に使うのですか？行列はなぜ必要ですか？数学の授業以外で使うことがあるのですか？// 行列はどのような場面で使うのですか？確率の問題で漸化式の連立方程式で使っているのを見ましたが，その頃は全く理解できませんでした．今なら便利だと思えるでしょうか？

答． 行列は順番を守るときに役立ちます，というのは冗談ですが,「行列」は数学のすべての分野で使います．たとえば，微分積分でも使います（特に多変数の場合）．統計の分野，多変量解析などでも使います．物理でも化学でも使います．このように基礎科学で必須の事項です．さらに，工学のすべての分野で応用されています．理工系では必須の事項です．さらに，経済学や金融の分野でも必要です．世の中がだんだん複雑になっていくので，どんな分野でも，ますます行列が必要になります．安心して学習してください．

問． 行列は「マトリックス」というそうですが,「行」とか「列」は英語で何というのですか？（どうでもいいことかもしれませんが）．

答． 行列は matrix で，行は row で，列は column (コラム) です．

問． １次結合の「１次」の意味がよくわかりません．// 何から来ているのですか？// 「線形」とは何ですか？

答． 線形とは，まっすぐで曲がっていない，ということです．線形なものは１次式で書くことができるので,「線形」のことを「１次」とも言います．線形でも１次でも，どちらを使っても意味が通じます.「１次結合」は「線形結合」とも言います.「１次変換」も「線形変換」も同じ意味です.（したがって，線形代数を１次代数とも言えますが，この言い方はあまり使いません.）

問． 高校の授業では，方法のみを教わっただけで，本質的な話がありませんでしたが，行列の本質，または行列とは何なのか，を知りたいです．// 高校の時，ハミルトン・ケーリーの定理や交換則の成立，不成立の事など簡単な事しか勉強しなかったのでよくわかりませんでした．

答． 行列の本質は「線形写像」です．その線形写像を具体的に表現するために数値を並べて行列ができま

す．このことは後期の線形代数 II で学びますので乞うご期待．

問． 行列の積の意味がよくわかりません．// 行列の掛け算で，どうしてあのような計算方法をするのですか？// 証明は可能でしょうか？// 行列の積の計算は，人間が勝手に定義したものなのですか?? あのように定義した理由はなんでしょうか?? // 行列の基本的な概念がよくわかりません．なぜ連立１次方程式などに応用できるのかという点が不思議なのですが．// 行列についての様々な約束事（定義等）は，行列の話が進んでいくと，役に立つものなのですか？

答． 実は，行列を線形写像（あるいは線形変換，１次変換）を表すものだと考えると，行列の積の意味がはっきりします．行列の積は，写像あるいは変換を続けること，合成することに他なりません．その意味で，講義で説明した行列の積の定義は，非常に自然な定義で，非常に役に立ち，非常に応用範囲が広いものです．

問． スカラー量で使える公式が行列の積ではどうして使えないのですか？感覚的にわかるように教えてください．行列の計算にも，わかりやすい発想はありますか？

答． 行列の掛け算が，掛ける順番で結果が変わってしまう，という理由です．このような現象を「非可換（ひかかん）」な現象と言います．実は，世の中は「非可換」なことが多くて，たとえば,「靴下をはいてから靴をはく」のと,「靴をはいてから靴下をはく」のでは，結果が違ってきますね．これは非可換です．行列の掛け算は,（特別な場合を除いて）非可換なのです．でも，たまに可換（かかん）なこともあります．たとえば，靴をはいてから手袋をはく（北海道弁！）のと，手袋をはいてから靴をはく，のは結果は同じですね．この場合は，たまたま可換なわけです．スカラー量の場合は，積演算がたまたま可換なので，いろいろな公式がたまたま簡単になった，というだけの話です．

問． 行列というのは，いつごろ何をするために考え出されたのですか？// 行列は，誰が何のために作り出したのでしょうか？

答． 諸説がありますが，行列は比較的最近，と言っても１９世紀に， Cayley という私 (石川) が尊敬する数学者が発見したと言われています.（ハミルトン・ケーリーの定理のケーリーです）.

問． 単位行列とは何ですか？

答． 講義で説明したように，対角成分がすべて 1 で，その他の成分が 0 であるような特別な正方行列です．

問． クロネッカーのデルタの記号が δ_{ij} であることはわかりますが，添字の i と j が何を表しているのかがわかりませんでした．

答． i, i には番号が入ります．たとえば δ_{12} とか (この場合は $i = 1, j = 2$), δ_{32} とか (この場合は $i = 3, j = 2$), δ_{33} など (この場合は $i = 3, j = 3$) のように．

問． クロネッカーのデルタの意味は何ですか？// クロネッカーのデルタは必要ですか？// クロネッカーのデルタは何のためにあり，何を表しているのですか？

答． 何のためにあるかというと，あると便利だからです．ちなみに，δ (デルタ）はギリシャ文字で，その大文字は Δ です．クロネッカー (Kronecker) は偉い数学者の名前です．ところで，クロネッカーのデルタという言葉を知らないと，森 博嗣（もり・ひろし）という作家の推理小説の題名「黒猫の三角」がダジャレだとは気が付かない，かもしれませんね．

問． 対角行列はなぜかけ算を逆にしたら答えは変わってしまうのですか？単位行列は，かけ算を逆にしても答えが変わらないのは，実際にやってみてわかります．対角行列は，単位行列の 1 を変えただけなのに答えが違ってしまいます．なぜなのでしょうか？

答． 単位行列は,「線形写像」で言うと，何も変えない，ということなので，積の順番が関係せずに，掛けた行列に等しくなるのですが，そうでない対角行列は,「線形写像」で言うと，いろいろな方向に違う倍率で拡大・縮小する変換になるので，掛ける順番が関係してくるわけです．

問． 対角行列の n 乗は，それぞれ成分を n 乗すればよい理由がわかりません．たとえば，$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$. 数学的帰納法での証明はできるのですが，少し納得がいきません．他の証明方法を教えてください．

答． 「線形写像」でいうと，行列 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ は，実は，x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍するという平面上の変換を表しています．A^2 はその変換を 2 回続けることです．それは，x 軸方向に a^2 倍，y 軸方向に b^2 倍する，ということです．A^n は x 軸方向に a^n 倍，y 軸方向に b^n 倍する，ということで，それを行列で表示している，ということです．

問． $AX = I, XA = I$ となる X が A の逆行列であると定義していましたが，X が逆行列でなくても掛けたら I になるのではないですか？$A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ となるのが，定義ではないですか？詳しく

教えてください．

答． なるほど．でも,「逆行列」はただ１つに決まります．つまり，$AX=I, XA=I$ となる行列 X は１つしかありません．そのことが証明できます．その上で，その X を具体的に（２次正則行列の場合に）求める公式が，質問に書かれた式なのです．

問． “連立一次方程式が解を持たない” の「解をもたない」とはどういうことですか？逆行列が存在しない時には，連立一次方程式の解が存在しない，と高校の時に習ったのですが，存在しない，とはどういうことなのでしょうか？実数解をもたないということですか？

答． 解を持たない，ということは，与えられた連立１次方程式を満たすような数値の組 $x_1, x_2, \dots, x_n$ がない，という意味です．一般の代数方程式（２次方程式，３次方程式,...）は，御存じのように，実数解はなくても，複素数の解は必ずあるのですが，これは,「単独の方程式」（連立の方程式でない）から言えることなのです．連立方程式の場合は，与えられた条件が複数あるので，その条件をすべて満たす数値の組があるとは限らなくなります．あとで講義で具体例を説明します．

問． $A^{-1}=\dfrac{1}{A}$ でないのはどうしてですか？

答． 行列の場合は，$\dfrac{1}{A}$ という記号自体を絶対に使わないからです．

問． 転置行列を考える意味がわかりません．// 転置行列は必要なのですか？// 転置行列は何のためにあるのですか？// 行列の積や転置などを定義することに何か便宜性はありますか？また，何か実用的なことに応用できるのでしょうか？

答． 便利だからです．主に理論的な観点から便利ですが，実用的なことに線形代数を応用するのにも使います．講義で説明するということは，役に立つ（もちろん，直接に金がもうかる，とか近視眼的な意味ではないですが）ので，安心して学習してください．

問． 数ベクトル分割の存在と利用価値が分かりません．

答． 便利だからです．これからすぐに利用します．安心して学習してください．

問． ケーリー・ハミルトンの公式は，２次の正方行列でしか使えないのですか？高校で習ったときは，$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=O$ という公式でしたが，３次以上の行列には，このような法則はありますか？

答． 3 次以上でもありますが，公式の形が少し変わってきます．詳しいことは，後期に使用予定の教科書「線形写像と固有値」に書いてあるので，それを見て下さい.（乞う御期待）.

問． プリント No.1 の３番の問題に関して，高校では A^n を求める問題で，逆行列を用いて解くことがほとんどだったのですが，行列が特別な形をしている場合，もっと簡単に解く方法があると思います．何か規則性を感じるのですが，この行列 A は特別な形をしていますか？// 他の方法はないですか？I の特徴を知ったら，ちょっと簡単になります：A^2-2A+I の場合は，$(A-I)^2$ にかわります．問題の場合，$(A-I)^2=\left\{\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}^2=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}^2=O$ になります．A^4 は上の答えを使って $B=A-I$ ととれば，$A^4=(B+I)^4=(B^2+2B+I)^2=(O+2B+I)^2=4B^2+4B+I=4B+I=4\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&8\\0&1&12\\0&0&1\end{pmatrix}$ になります．

答． すばらしいですね．いろいろな別解を考えるということは，非常に良いことです．

問． 数ベクトルとはどのような世界のベクトルなのですか？ベクトルの定義は,「向きと大きさ」を持つ量でした．そもそも，$n \geqq 4$ の数ベクトルは向きを持つものなのでしょうか？それとも，今まで扱ってきたベクトルとは全くの別モノなのでしょうか？// 数ベクトルの向きが一体どっちを向いているのかわかりません．ベクトルは矢印のようなものという考え方ではいけないのでしょうか？// ベクトルにしても，IIB で習うベクトルとは，また違う感じがして，何ともつかみ所がありません．

答． なるほど．確かに，ベクトルとは「向きと大きさ」を持つ量，ということで理解しておいて十分なのですが，そのときの「向き」とは何か,「大きさ」とは何か，ということがはっきりしていませんね．ですから，そのような意味付けは，はじめて「ベクトル」を勉強するときや，どういう問題に「ベクトル」の理論が使えるか，というときの助けになるものの，これがベクトルの定義である，とは言いがたいですね．現代的な定義は，後期の授業にゆずるとして，ここでは，ベクトルには２種類ある,「幾何ベクトル」と「数ベクトル」の２種類の表現方法があると理解しておくと良いと思います．幾何ベクトルは，空間の２点を結んでできるベクトルで，お馴染みのように，矢印で表すことができるものです．２点が P, Q のときは，$\overrightarrow{PQ}$ と書きます．平行移動して重なる幾何ベクトルは，同じものと見なします．このとき，空間は，何次元でも構いません．４次元以上でも大丈夫です．点 P から点 Q へ向うような向きをもつ量であると言えるので，直感

と合いますね．一方，数ベクトルは，数字を n 個並べたものです．見かけは違いますが，幾何ベクトルの始点 P を平行移動して，原点に持ってきたとき，その終点の座標を見れば数ベクトルが得られるので，幾何ベクトルも数ベクトルも同じ情報をもった量であることがわかります.

問． 行列は一見してベクトルと関係が深そうなのはわかります．しかし，行列がベクトルだとしたら，例えば 100×100 型行列は矢印で座標空間にどうやって図示するのですか？

答． 一応，行列のうちの特別なものが (数) ベクトルである，と理解しておいてください．たとえば，100×1 型行列などをベクトルと言います．このベクトルは，100 次元の座標空間の矢印で表されます．もちろん，具体的に図示することは難しいですが，想像して見て下さい.（２次元の図から３次元を想像するように...）

問． 数ベクトルや単位行列は日常的にどういう場面で使われているのか知りたいです.

答． 日常的にいろいろな場面で使われています．ただわれわれが気が付かないだけです．たとえば，こっそり機械の中で使われていたりします．それから，たとえば日常的な線形代数のテストの中で使われると思います.

問． 連立２次方程式は解けないのですか？

答． 連立一次方程式には，いまから説明するように，一般的な解法があって，どんな方程式でも解けます.（あるいは，解がないことが判定できる）．しかし，連立２次方程式は一般的に解くのは難しいです．幾何学の深い素養があれば，その難しさはわかります．ただし,（解が存在する場合に）数値解析によって近似解を見つけることは，個々の方程式に関しては可能です.

問． ベクトルの外積について教えてください.

答． ３次のベクトルについて外積は定義されます．その幾何的な意味は，２つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積をもち，それらに垂直なベクトルであって，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ の「行列式」が正になるもの（右手系になるようなもの）ということです.（数ベクトルとしての定義は，質問にあった通りです）．したがって，２つのベクトルが平行なら外積はゼロになります.

問． $y = 2ax + a^2$ $(a \in \mathbf{R})$ の通過範囲を求めるとき，$a^2 + 2ax - y$ の判別式 $= 0$ が通過範囲の境界になるのは何故ですか？

答． 通過範囲上の点を，直線が２本通過する．ただし，境界上では，１本だけ通過する，ということに着目します．そこで，(x, y) を固定して，α を動かすと，通過範囲上では，２つの α の値に対して，$a^2 + 2ax - y = 0$ が満たされます．つまり，解 α が２つある．ただし，境界上では，ただ１つの α の値に対して $a^2 + 2ax - y = 0$ が満たされる，つまり，α が重解である，ということです．このことを判別式を使って書いているわけです.

問． 円周率はどういう計算で出るのですか？また，$3.14\ldots$ が「π」になった理由も教えてください.

答． たとえば，円を多角形で近似して円周率の近似値を求めます (アルキメデスの方法．外接多角形で円周の長さを近似すると，長さが少々，オオキメデスね.）それはともかく，いろいろな計算で導くことができます．詳しくは微分積分学で習います．ところで，円周率を π と表した最初の人は，数学者の Euler (オイラー) で，周囲を表すギリシャ語 $\pi\varepsilon\iota\varphi\varepsilon\rho\varepsilon\iota\alpha\varsigma$ からきているそうです（出典：小林昭七「円の数学」裳華房）.

問．「χ」という文字の意味が分かりますか？高校のとき x (エックス）を χ のように書いていたら，先生に，大学に行くと χ の文字は x 以外の別の意味で使うので，エックスは x にしなさい，と言われたことがあります.

答． なるほど．χ はギリシャ文字の「カイ」です．それほど実害はないと思いますが，できれば，エックスは x と書いた方が良いかもしれません.

問． 行列のテストで，書くスペースに困ったらどうすればいいですか？

答． 裏面に書くと良いです．ただし，表面に「裏にも解答あり」と明記してください.

問． 教科書 5 ページの記号 $\leq$ の意味がわかりません．教科書の状況から考えると，$\leqq$ と同じ意味だと思いますが，確認しておきたいのでお願いします.

答． 同じ意味です.

問． ２年生で選択になっている「数学概論」というのはどんなことをやるのですか？

答． 数学の基礎的なことや応用についての講義を行います．具体的な講義内容は，担当教官によるので，北大のホームページのシラバスを見てみると良いと思います.

問． 質問を毎回考えられそうにないです．// １年間頑張ります．// 先生の声は聞きやすく，受けやすい授業です.

答． 頑張ってください．ありがとう．今回は，ほぼすべての質問，コメントに答えました．次回から講義内容に関連した良い質問だけを選んで回答すると思いますが，ともかく引き続きよろしく．ではまた.