線形代数 II　質問に対する回答

No. 2　(２００９年１２月１５日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しますが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．以前の回答書ですでに回答済のものは繰り返していません．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してください．文体を（です，ます調に）統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問・補足説明の文章を変えて掲載する場合があります．
回答書は，http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html に掲載予定です．参考にしてください．

２月２日（火）の授業時間に線形代数 II（担当：石川）の期末テスト（３回目のテスト）を行う予定です．持ち込み不可．８５分．試験範囲は，１月２６日（火）の授業で進んだところまで．都合が悪く受験できない人（できなかった人）は，早めに私 (石川) に申し出て，追試験を受けてください．
２回目のテスト（１２月２２日実施）を受験できなかった人についても追試験を設定中なので，該当者は（もう一度）授業後などに申し出てください．

問．固有値，固有ベクトルとは何なのかよくわかりません．// 「λ が A の固有値 $\Leftrightarrow t=\lambda$ は方程式 $|tI-A|=0$ の解」が納得できません．
答．あけましておめでとう．今年もよろしく．では，回答ですが，まず，固有値と固有ベクトルの定義を復習してみましょう．正方行列 A （あるいは A で決まる線形変換について），
「λ が固有値」$\iff$「$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ が存在する」$\iff$「方程式 $(\lambda I-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が非自明な解 $\boldsymbol{x}$ を持つ」$\iff$「$|\lambda I-A|=0$」です．
「$\boldsymbol{x}$ が固有ベクトル」$\iff$「$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ かつ $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ となるスカラー λ が存在」$\iff$「ある λ について方程式 $(\lambda I-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の非自明な解」です．行列の固有の値はこういう値，固有のベクトルはこういうベクトル，と覚えてください．
問．固有値と固有ベクトルの具体的イメージとして，画像を行列 A で変換したとき，向きは変わらず長さだけ変わるのが固有ベクトルで，具体的にどのくらい長くなるのかが固有値と考えていいですか？
答．いいです．まず，線形変換を（平行光線に関する）射影でイメージするとよいでしょう．たとえば正方形は平行四辺形に写ります．円が楕円にうつります．ちなみに，楕円の長軸と短軸の方向が固有ベクトルの方向になります．
問．$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ はなぜ固有ベクトルではないのですか？
答．そういう定義だからですが，$\boldsymbol{0}$ に対しては，対応する固有値が定まらないからです．どんなスカラーも固有値になってしまうからです．$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ に対しては，どんな λ についても，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ が成り立ってしまうからです．
問．線形変換の１次元不変部分空間 L と（固有値 λ に関する）固有空間 $V(\lambda)$ の関係が混乱しています．
答．線形変換 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ について，「固有空間 $V(\lambda)$ は（１次元とは限らない）f-不変部分空間で，その中のすべての１次元部分空間は f-不変である」と理解してください．"固有空間 $V(\lambda)$ は，固有値 λ に対する固有ベクトルすべてと $\boldsymbol{0}$ を含めた部分空間" と覚えてください．
「$L=|\boldsymbol{x}|$ が１次元不変部分空間」$\iff$「$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ かつ $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ となる λ が存在」$\iff |\boldsymbol{x}|\subset V(\lambda)$ となる λ が存在」です．こういうふうに，ベクトルの側から見るか，スカラーの側から見るかの観点の違いがありますね．なお，部分空間とは部分ベクトル空間のことです．
問．$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ といった書き方がどういう意味を表しているのかがよくわかりません．
答．生成される部分空間を表しています．$\langle\boldsymbol{x}\rangle$ は，ベクトル $\boldsymbol{x}$ で生成される部分空間，つまり，$\boldsymbol{x}$ のスカラー倍で表されるベクトルたちが作る部分空間です．$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ なら，零ベクトルだけですが，$\boldsymbol{x}\neq 0$ なら $\langle\boldsymbol{x}\rangle$ は $\boldsymbol{x}$ 自身を基底とする１次元部分空間になります．したがって，$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle=\left\{\begin{pmatrix}c\\0\\0\end{pmatrix}\,\middle|\, c\text{ は任意定数}\right\}$ です．同様に，$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=\left\{\begin{pmatrix}c\\d\\0\end{pmatrix}\,\middle|\, c,d\text{ は任意定数}\right\}$ などと表しています．
問．固有空間の求め方が良く理解できません．
答．行列 A について，行列 $\lambda I-A$ を作り，方程式 $(\lambda I-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解きます．
問．固有空間 $V(\lambda)$ が V の部分空間なのはなぜですか？ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ なのに $V(\lambda)$ が部分空間であるのが納得いきません．
答．$\boldsymbol{0}$ は固有ベクトルではないですが, 固有空間には入れています．そうしないと部分空間にならないからです．そうすると，$\boldsymbol{0}$ は動かないし, 他のベクトル $\boldsymbol{x}\in V(\lambda)$ も λ 倍されるだけなので, $(\lambda I-A)(A\boldsymbol{x})=(\lambda I-A)(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda(\lambda I-A)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{0}=0$ となり，$A\boldsymbol{x}\in V(\lambda)$ となるからです．
問．固有値は何の役に立つのですか？ // 以前，量子力学の本を読んだときに「固有値問題」というものがありました．これは行列と関連するのでしょうか？
答．関連します．量子力学では，線形変換の１次元不変ベクトル空間を１つの状態 (state) と捉え，対応する固有値だけが観察できる量 (observable) としています．したがって固有値を求めることが重要になります．もともとは，固有値は「２次曲面」を調べるために重要な概念でしたが，２０世紀に入って量子力学において応用されたという経緯があります．量子力学の基礎を作った人々（とくにハイセンベルグなど）は，もちろん（事前に）固有値を知っていたわけですね．
問．複素数の範囲で空間を考えるのはなぜですか？ // 固有値は空間によって値は左右されるのですか？ たとえば，$\mathbf{R}^n$ のときは固有値は実数だけをとるとか，$\mathbf{C}^n$ のときは虚数の固有値をとるとか，そういった空間による縛りはあるのでしょうか？

答．考えている空間が $V=\mathbf{R}^n$ の場合でも，$V=\mathbf{C}^n$ の場合でも，固有値は複素数の範囲で考えます．実行列であっても固有方程式の解は一般には複素数だからです．そういう意味では「空間による縛り」はないですが，たとえば，実代数方程式の虚数解は，複素共役がペアになって現れる，などの特徴はあります．（２次方程式の解の公式を思い出すとよいです）．
問．線形写像や内積・外積などの他の線形代数の特徴は複素数上で使えるかどうか気になりました．
答．使えます．なぜなら，スカラーが実数の範囲か複素数の範囲か，ということは問題にならない特徴だからです．
問．固有方程式の解が $t=1,1,2,3$ のように重解も表記するのはなぜですか？
答．表記した方が情報量が多く，解の個数が行列の次数と合うので間違いづらい，という利点がありからです．
問．表現行列を求める目的は何ですか？ 表現行列を求めることと固有値を求めることにどんな関係性があるのですか？
答．深い関係性があります．固有ベクトルからなる基底を用いて表現行列を作ると，行列が対角化できます．
問．「線形変換の表現行列の変換公式」は，高校の時にやった対角化と関係ありますか？ // 行列の対角化に必要な行列 P は固有値を求めることによって求めることができるのですか？
答．関係あります．固有値と固有ベクトルを求めることができれば対角化ができます．
問．単位行列を I と書くか E と書くかの違いはありますか？
答．違いはありません．
問．n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ とするとき A が対角化可能である必要十分条件が「$(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)\cdots(A-\lambda_kE)=O$」という考えは正しいのでしょうか？
答．正しいです．教科書の補足 H の p.68 の対角化の条件 (5) からわかります．
問．固有値は正方行列以外では求められないのですか？
答．正方行列以外では考えません．
問．f-不変な部分空間の定義で，「L に属する各ベクトルが f によって再び L に属するベクトルに移される」ということは，L に属する全てのベクトルにおいて成り立たないとこう言えないのですか？ ということは，あるベクトルを永遠に線形変換し続けたら，ある点にまた戻ってくるということですか？
答．なるほど．永遠に線形変換し続けるということを考えることが可能です．それは「力学系」と呼ばれる対象で深く研究されている分野です．ただし，ある点に戻ってくる場合（周期点）もありますが，戻らずに永遠にさまよう場合もあります．
問．線形写像 $f:V\to W$ に対して f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ と像 $\mathrm{Im}(f)$ を考える意味は何ですか？
答．線形写像の特徴を表しているからです．線形写像について「まず最初に調べるべきもの」です．線形変換の場合は，固有値，固有ベクトル，固有空間などが「まず最初に調べるべきもの」です．
問．$\dim(\mathrm{Im}(f))+\dim(\mathrm{Ker}(f))=n$ は何故成り立つのかどうしてもしっくりときません．// 教科書 p.35 定理 2.2 の証明がわかりません．
答．線形写像 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n, f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ について，２通りの説明をしてみましょう．まず連立一次方程式の解法と関係付けてみます．A の階数を r とすると，$\dim(\mathrm{Im}(f))=r$ です．（$\mathrm{Im}(f)$ の基底の個数が r）．$\dim(\mathrm{Ker}(f))=s$ とおくと，s は，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解に含まれる任意定数の個数です．階数が r だと，n 個の未知数たちに，r 個の関係式があるので，$s=n-r$ となります．つまり，$r+s=n$ となるわけです．２つめの説明が教科書の証明で，$\mathbf{R}^n$ の基底として，$\mathrm{Ker}(f)$ から s 個のベクトルを選び，残り $n-s$ 個はそれ以外のベクトルに選べるので，それらを f で写すと，s 個は $\mathbf{0}$ に写るが，$n-s$ 個は一次独立で，$\mathrm{Im}(f)$ の生成系になることが示せます．したがって $\dim(\mathrm{Im}(f))=n-s=n-\dim(\mathrm{Ker}(f))$ となります．
問．教科書 p.35 ページの問５が分りません．なぜ $V=W$ のときに $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(f))$ にならないのですか？
答．定義通りに考えてみましょう．$\mathrm{Ker}(f)=\{\boldsymbol{x}\in V \mid f(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}\}$ で，$\mathrm{Im}(f))=\{f(\boldsymbol{x})\in V \mid \boldsymbol{x}\in V\}$ なので，定義がまったく異なるので，（同じ空間の部分空間ですが），同じ部分空間になるとは限りませんね．
問．線形代数で扱う次元 (dim) と私達が一般的にいう次元には関係があるのでしょうか？ 四次元より高次の次元も線形代数学を使えばそのまま考えることができるのでしょうか？
答．関係があります．直感的な次元を数学的に厳密に定義したものが「ベクトル空間の次元」です．４次元以上ももちろん考えられます．たとえば，$\mathbf{R}^{2010}$ は 2010 次元空間です．
問．次元がなぜ整数次元しかないのですか？ // 次元は整数値のみのとびとびの値なのでしょうか？ 次元に連続性のようなこのはあるのですか？ 何の本だったかは忘れましたが，連続幾何だとかいう単語を目にしました．
答．ベクトル空間の次元は 0 以上の整数値です．線形ではない「多様体」についての次元も 0 以上の整数値です．ただし，もっと複雑な図形については，（別の定義の）次元が考えられていて，それは，実数値を取ります．「フラクタル次元」などと呼ばれています．ところで，「連続幾何」というのは，有名な数学者であるフォンノイマンが創った理論として有名ですが，あまり発展性がなかったようです（少なくとも現在までは）．
問．線形写像 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ について，$\mathrm{Im}(f),\mathrm{Ker}(f)$ の行の数は m と n になるのですか？
答．そうです．「行の数」あるいはベクトルの「次数」という用語と，部分空間の「次元」という用語は違う意味で使っています．
問．「 $\mathbf{R}^n$ の空間を f で変換すると $\mathbf{R}^m$ の空間になる」ということで，$\mathrm{Im}(f)=\mathbf{R}^m$ と考えられなすが，どこが違うかわかりません．
答．「 $\mathbf{R}^n$ の空間を f で変換すると $\mathbf{R}^m$ の空間になる」というフレーズは，「 $\mathbf{R}^n$ を f で変換すると $\mathbf{R}^m$ の一部分になる」と言うべきです．つまり，$\mathbf{R}^m$ 全体に写るとは限りません．そこが違いますね．教科書の補足 D（p.43）の写像の項目を参考にしてください．$\mathrm{Im}(f)=\mathbf{R}^m$ の場合は，とくに「全射」と呼ばれています．
問．逆関数と写像にはどのような関係があるのですか？
答．深い関係があります．教科書の補足 D（p.43）にあるように，写像とは，ある集合（定義域）の各要素にある集合（値域）の要素を対応させる対応規則のことです．その写像が「全単射」（１対１上への対応）のときには，「逆写像」が考えられます．高校で習った逆関数はその特別の場合であり，たとえば，関数 $y=x^2$ は $X=\{x\in \mid x\geqq 0\}$ から $Y=X$ への全単射なので，逆関数が考えられて，$x=\sqrt{y}$ で与えられます．
問．数学と一口に言っても様々な分野がありますが，先生はどの分野が一番好きですか？（コメント）
答．幾何の分野です．線形代数や微分積分はそのための基礎でもあると思っています．ではまた．