線形代数 II　質問に対する回答

No. 1 (２００９年１１月１０日の分) 担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しますが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してください．文体を（です，ます調に）統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問・補足説明の文章を変えて掲載する場合があります．回答書は，http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html に掲載予定です．参考にしてください．

> １２月２２日（火）の授業時間に線形代数 II（担当：石川）の中間テスト（２回目のテスト）を行う予定です．持ち込み不可．８５分．試験範囲は，１２月１５日（火）の授業で進んだところまで．都合が悪く受験できない人（できなかった人）は，早めに私 (石川) に申し出て，追試験を必ず受けてください．
>
> １回目のテスト（１１月１７日実施）を受験できなかった人についても追試験を設定中なので，該当者は（もう一度）授業後などに申し出てください．

問．線形写像は実際に何の役に立つのですか？
答．この授業の中では，連立一次方程式を理論的に解く（理解する）ために線形写像を役立てます．他には，最初の授業（ガイダンス）でも話ましたが，微積分と関連していて，「微分する」ということは，実は “非線形写像”を「線形近似」して「線形写像を求める」ことで，微分が役に立つので，したがって線形写像も役に立つわけです．その他にも応用がたくさん（多変量解析，統計，多様体論，...）あります．
問．線形性を日本語で説明するとどうなるのですか？
答．「線形」という用語には「まっすぐな」とか,「曲がっていない」という意味があります．英語では「リニア (linear)」です．「線形性」の意味がいちばん端的に現れるのは，「線形写像」の条件です．それは，$f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$, $f(c\boldsymbol{u}) = c\,f(\boldsymbol{v})$ という条件です．$\boldsymbol{u}$ が「インプット」で，$f(\boldsymbol{v})$ が「アウトプット」と見なすと，インプットを足したら，アウトプットも足したものになる，インプットをスカラー倍したら，アウトプットもスカラー倍される，という性質です．この性質が「線形性 (linearity)」と呼ばれています．そして，この線形性に付随することがらの多くに「線形」という用語が使われています．ところで，世の中は，だいたい線形ではなくて「非線形」の世界（２倍努力しても，２倍の成果は出ない...）なのですが，理想的に「線形」で近似して，線形代数を使うことにより，世の中のことを解明できる場合がたくさんあり，だからこそ線形代数が有用になります．
問．線形写像と一次変換はどう違うのですか？ 線形写像の中に一次変換が含まれていると考えるべきなのかわかりません．
答．同じものの別名であるという理解でよいです．ただし，これは「一次変換」という用語を柔軟に使うという前提での説明です．なお教科書では，線形写像と一次写像を同じ意味に設定して，線形変換（一次変換）を特に，定義域の次元と値域の次元が等しい場合に限定して使用しています．
問．線形写像で $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ というのが出てきましたが，$\mathbf{R}$ は実数値を表すものというイメージがあったのですが，そう考えると $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ というのが，どうなっていることなのかよく分りませんでした．
答．n 変数の m 次ベクトル値の関数 $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ と見ればよいと思います．
問．写像とはつまり何か分りません．
答．「像を写す」という意味ですが，英語では mapping と呼びます．写像には，少なくとも３つの説明の仕方があって，１つは,「写真をとる」という説明です．現実の空間のある一部分の各点が，写真のある場所に写されます．２つめは,「物にシールを貼る」という説明で，たとえば，リンゴに産地（青森とか長野とか）のシールを貼れば，リンゴの集合から産地の集合への写像ができます．物を数えたり，分類したりするのも，写像を構成することと見なされます．３つめは,「入力と出力」という説明で，$\boldsymbol{x}$ が入力，出力が $\boldsymbol{y}$ で，線形写像の場合は，ある行列 A を $\boldsymbol{x}$ に掛ける，という写像になります．
問．「基底」と「生成系」の２つがある理由は何ですか？
答．一次独立という条件を満たす生成系を基底と呼ぶからです．違う概念だからです．
問．基底であることと一次独立の関係はどのようなものですか？ // 「無駄のない生成系」とはどういう意味ですか？ // 「無駄のない生成系」である基底の「無駄」とは何ですか？
答．「無駄がない」という説明は，ベクトルの組があって，その中のある１つのベクトルが，その他のベクトルの一次結合で表されない，という意味です．要するに一次独立な生成系である，ということです．逆に一次従属であれば，１つのベクトルが他のベクトルの一次結合で表されるので，そのベクトルを除いてもまだ生成系のままである，という意味で「無駄がある」という意味あいです。単にニュアンスを伝えたいためのものなので，あくまで主役は「一次独立」という概念なので，あくまで「一次独立」という定義に基づいた推論をしてください．ちなみに $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r$ が一次独立であるとは，「$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r = \mathbf{0}$ という式から $c_1 = 0, \dots, c_r = 0$ が導かれる」と定義されます．皆さんは「定理」は覚えるが「定義」を覚えないようですが，まず覚えるべきは「定義」です．定義がわかれば，あとは（基本的に）自分で考えればすむはずのことです．

問．教科書 p.12 定理 1.9 の証明の「議論の対称性」とは何ですか？
答．たとえると，いまあるクラスの学生さんから任意に A さん B さんを選んだとき，A さんの年齢が B さんの年齢以下であることが言えたならば，結局，全員同じ年齢だ，という論法です．
問．「基底の個数は一定だが，基底のとり方は一通りではない」ということがどういうことかわかりません．
答．たとえ話で説明すると，「国会議員」は国民の代表ですね．(「無駄がない」かどうかは不明ですが，それはともかく）議員の人数は法律で決まっていて一定です．でも，国会議員の顔ぶれは，選挙の結果により，一通りではないですね．こういうことです．
問．L の基底のベクトルの数が，その取り方によらないというのは，L の次数 (?) で決まるからでしょうか？
答．L の「次元」で決まるということですが，論法が逆で，「L の基底のベクトルの数が，その取り方によらない」ということが証明できるので，そこで，その数を「次元」と呼ぼう，ということです．とかくあいまいになりがちな次元の定義を明確にできる，というのが線形代数学のよいところです．
問．基底の変換行列を P とすると，$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r)P$ と表されるとありましたが，なぜ P がうしろに来るのでしょうか？
答．行列の積の定義に基づいた書き方をすると，そうなるからです．$\boldsymbol{b}_1$ 達は，列ベクトルで表されるので，横に並べて行列を作りますね．そうすると，行列の積の定義から，一次結合の式が $\boldsymbol{b}_1 = c_{11}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{r1}\boldsymbol{a}_r = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix}$ と表されるので，右側から掛けることになります．
問．なぜ基底の変換行列は正則行列なのですか？ 逆行列を持たないと基底どうしの関係をつなげられなくなるのですか？
答．そうです．対等な関係にあるので，逆がなければいけませんね．
問．$B = AP$ の場合，変換行列 P は A の B に関する変換行列ですか？ それとも，B の A に関する変換行列ですか？
答．$B = AP$ という関係式が分っていれば問題ないです．強いていえば，A を B に変換するための変換行列と呼べばよいですね．
問．教科書 p.15 問 11 の略解が分りません．$P = A^{-1}B$ の式から導くのかと思いました．
答．$P = A^{-1}B$ で求まるのは，考えている部分ベクトル空間 L が全体になっている場合，つまり $L = \mathbf{R}^m$ の場合だけです．問 11 の場合は，定義の条件式から直接求める必要があります．
問．部分ベクトル空間の必要性が実感できません．
答．連立一次方程式の解空間が部分ベクトル空間だ，ということで必要性を実感してください．
問．教科書 p.9 例 8 の，解空間 K が部分ベクトル空間である，という意味を教えてください．
答．部分ベクトル空間の定義を満たす，という意味です．
問．教科書 p.13 例 13 の平面の定義で，平行な 2 直線は平面でないというのは何故ですか？
答．「原点を通る平行な 2 直線は平面を定めない」と言えばよいと思います．(その 2 直線は一致してしまうから)．
問．ベクトル空間のイメージの仕方が分りません．
答．$\mathbf{R}^m$ とその部分ベクトル空間をイメージするとよいと思います．
問．部分ベクトル空間は，例えば，$\mathbf{R}^3$ の部分ベクトル空間としては，$\mathbf{R}^3$ 上の $\mathbf{0}$ を通る何かしらの平面，直線，原点などと見なしてよいのですか？ また，基底は，たとえば，$\mathbf{R}^3$ 上なら，同一平面上になり適当な 3 つのベクトルと考えてよいのですか？
答．よいです．その通りです．
問．$\mathbf{R}^3$ 以外で 3 次元部分ベクトル空間とはどんなものですか？
答．$\mathbf{R}^4$ の中で，$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ という条件で定まる部分ベクトル空間は 3 次元です．
問．部分ベクトル空間の「空間」とは，どの次元まで必要ですか？ // 高次元のことを考える意義を教えてください．// 話が抽象的すぎて，どうも感覚がつかめません．
答．どの次元まで必要になるかは，誰にもわからないので，何次元までも考えます．考えるのは自由だからであす．抽象的ですが，慣れれば大丈夫です．自由に考えることは楽しいです．そして，合理的に考えることに制約はありません．誰もそれを規制することはできません．
問．生成系や基底を部分ベクトル空間内のみで考えるのでしょうか？ 部分ベクトル空間に円や球の内部などは定義に含まれないと思うのですが，それらの生成系や基底についてはなぜ考えないのでしょうか？ 考える必要があることはないのでしょうか？
答．考える必要があります．ただし，曲がった図形には，そのまま「生成系」とか「基底」を考えられないので，その図形の「接ベクトル空間」というベクトル空間を設定して，その「生成系」や「基底」を考えます．円や球を深く理解するためにこそ，線形代数が必要なのです．
問．教科書の補足 B にある複素ベクトル空間の $\dim_{\mathbf{R}} V = 2\dim_{\mathbf{C}}(V) = 2m$ が分りません．
答．複素数は，実部と虚部で $x + yi$ (i は虚数単位) と表されるので，スカラーを実数の範囲に限れば，(x, y) と 2 次のベクトルで表されるので 2 次元です．このように，複素ベクトル空間を実ベクトル空間と見なすと，基底のベクトルの個数が 2 倍になるので，次元が 2 倍になります．

問．演習プリント 2-2 の $L = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 - \ x_3 & = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = 0 \end{array} \right\}$ の次元がわかりません．

答．次元は 1 です．なぜなら，連立一次方程式 $x_1+2x_2-x_3=0, 3x_1-3x_2+2x_3=0$ から，$x_1 = -\frac{1}{9}x_3, x_2 = \frac{5}{9}x_3$ と解けるので，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9}x_3 \\ \frac{5}{9}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{5}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるので，1 次元です．

問．一次従属と一次独立の関係についてよく分りません．

答．一次独立でないとき，一次従属と言います．

問．演習プリント 1-2 で，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が一次独立だから，$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が導かれるのかわかりません．

答．$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ という「列ベクトル」が，一次結合の係数（を並べたもの）を表しているからです．

問．演習プリント 3-1 の解答ですが，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ が一次独立であることを示しただけで L の生成系であることを示したことになっているのでしょうか？

答．なります．講義で説明したように，2 次元ベクトル空間の中の 2 つの一次独立なベクトルは，自動的に 1 次独立になり，基底になります．（教科書参照）．

問．$K \subset L$ は，数学記号としては，$K \in L$ と表すべきなのではないでしょうか？

答．質問内容が不明（勘違い？）ですが，もし，部分空間についての質問であれば，$K \in L$ は誤りで，$K \subset L$ が正しいです．（ちなみに，$K \in L$ は属する，$K \subset L$ は含まれる，と読みます．）

問．基底の変換行列 P を求める例題で $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$ とおいたあとに，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$ と出てきたのですが，c_1, c_2 と 2 回同じ文字を出していいのですか？

答．同じ文字を使ってもよいし，異なる文字を使ってもよいです．別の状況ですが，たとえば，方程式 $x^2+x+1=0$ を解いたあとで，同じ文字を使って，方程式 $x^2-x+1=0$ を解くようはことは普通に行いますね．もちろん，別の方程式だからということで，文字を変えて，方程式 $t^2-t+1=0$ と書き分けてもよいのと同じことです．

問．教科書 p.19 定理 1.15 の証明などに現れる $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{a}$ という表現がよくわかりません．

答．自明な式ですが，説明のために，わざと明記しています．

問．線形写像は数ベクトル空間の次元を変えることが多いのでしょうか？

答．変える場合も多く，変えない場合も多いです．変えない場合，つまり，$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ の形の場合に線形写像を「線形変換」とよぶ場合があります．

問．部分集合の定義で，L に属するベクトルの関係式が L に属するという感覚がわかりません．等式は L に関する条件式なのですか？

答．条件式です．（条件式が L に属する，という意味ではありません．）

問．ベクトル空間の公理と環の満足すべき条件が似ているように思えるのですが，これらに関係性はあるのですか？

答．関係性はあります．ただし，環の場合は，環の要素同士の「積」も与えられているという違いがあります．たとえば，正方行列の和と積を考えれば，環になります（行列環と呼ばれる）．

問．この前，工学系の授業を受けた時，スピーカーなどで音響効果を生み出すために，ある行列をかける，というような話を聞きました．音などの波はサイン波だと思うのですが，サイン波に行列をかける事はできますか？

答．できます．波を $\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$ で表せば，行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を掛ければ，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos x + b\sin x \\ c\cos x + d\sin x \end{pmatrix}$ という波動が得られます．

問．演習プリント 3-1 で $\mathbf{R}^3$ となっているのに，計算すると基底が 4 つ存在することになり，次元が 4 になるのはなぜでしょうか？

答．誤解です．それぞれ 2 つずつが基底です．基底が 2 組あるだけです．次元は，あくまで 2 次元です．

問．p.19 の問 15 について，略解に「M は K_1 と K_2 の共通部分であることを示せ」に関する説明がありません．

答．難しくない部分だから略解では省略されている，と理解してください．

問．「抽象的な理解」とは，どういうことですか？

答．「具体的な理解」ではなくて，「理論で論理的に理解する」という意味です．具体的な理解と抽象的な理解の両方ができるようになってください．直感と論理の両方を鍛えてくださいね．ではまた！