線形代数 II　質問に対する回答

No. 3　(２００８年7月1日の分)　担当 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．なるべく多くの質問に回答するよう努力しますが，回答しづらい質問には回答していないものもあります．回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問してください．文体を（です，ます調に）統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問・補足説明の文章を変えて掲載する場合があります．回答書は，http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/lecture.html にも掲載予定です．

期末テスト（２回目のテスト）は、８月８日（金）（最後の講義日）を予定しています．持ち込み不可．８５分．範囲は中間テスト（１回目のテスト）の範囲以降で直前の講義で扱ったところまで．

問．正方行列を対角化することによって，その行列の何を知ることができるのですか？ // 対角化の目的や，どういう場面で対角化が必要になるかを教えて下さい．

答．たとえば，$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ は，$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ですが，A と B はどちらがわかりやすいでしょうか？ B の方がわかりやすいですね．しかも，$B = P^{-1}AP$ という関係にあるので，共通の性質があります．たとえば，線形変換 T_A も T_B も，一つの方向には 1 倍，別の方向には 4 倍する変換である，ということは共通しています．対角化は，その正方行列が定める線形変換の本質を見極めるために行い，たとえば，A^n の計算などに用いられます．(具体的には，たとえば「フィボナッチ数列」と呼ばれる数列の一般項を求めるのに対角化が使えますが，時間がないので，講義では扱いません．)

問．対角化する際に何故固有値や固有空間の考えが必要なのですか？

答．固有値は，対角化したときの対角成分を知るのに必要です．また，固有空間は，対角化するための正則行列 P を求めるために必要です．

問．固有空間とは何を表しているのか，よくわかりません．固有値を入れたときの $[tE - A]$ の（解空間の）基のこと？ とか思ってしまいます．

答．固有値 λ を決めるごとに，方程式 $(tE - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$ の形成する解空間を固有空間とよびます．この空間は，固有値 λ に対応する固有ベクトルたち（これらは $\boldsymbol{0}$ ではない）に $\boldsymbol{0}$ も仲間にいれて考えたものです．固有空間の基が，対角化のときに利用されます．

問．対角化できるための条件がよくわかりません．// $\sum_{i=1}^{r} \dim(W(\lambda_i, T_A)) = n$ について，具体的に何を表しているのかわかりません．

答．たとえば，$n = 2$ のとき，2 次正方行列 A について，固有値が 1 と 4 としたとき，固有空間 $W(1, T_A)$ の次元（基のベクトルの個数）と固有空間 $W(4, T_A)$ の次元（基のベクトルの個数）の和が n に等しいという条件，($\dim W(1, T_A) = 1, \dim W(4, T_A) = 1$ で $1 + 1 = 2$) ということです．

問．なぜ，異なる固有空間の基同士が必ず１次独立になるのか，教科書を見てもよくわかりません．

答．説明しましょう．一般的な証明は教科書 p.107 の定理 5.4.1 の証明の中に書かれあるので，補足的な説明をします．線形変換 T の固有値 $\lambda, \mu, \lambda \neq \mu$ について，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in W(\lambda, T), \boldsymbol{v} \in W(\mu, T)$ で，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ が１次独立で，$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ という状況を考えましょう．このとき，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}$ は１次独立です．なぜなら，$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ とおくと，この両辺に T を作用させて（$T = T_A$ の場合，行列 A を左からかけて）$\lambda(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2) + \mu(c_3\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ が導かれます．これは，T の線形性と固有ベクトルの性質から導かれます．したがって，$(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2, c_3\boldsymbol{v}) \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{bmatrix} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ という式を得ます．$\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$ は正則行列なので，逆行列が存在するので，$(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2, c_3\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \mu \end{bmatrix}^{-1} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ つまり，$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}$ と $c_3\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が導かれます．そうすると，それぞれの１次独立性から，$c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$ が導かれ，結局，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}$ が１次独立であることがわかります．

問．対角化で，どの固有値がどの場所に位置してくるか，ということがわかりません．// (対角化で使う正則行列) P の中の固有ベクトルの順番は決まっているのでしょうか？ // 対角化を行った時に，対角成分が簡単にわかるのはなぜですか？

答．説明します．たとえば，３次正方行列 A の固有ベクトルからなる $\mathbf{R}^3$ の基 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}$ で，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in W(\lambda, T_A), \boldsymbol{v} \in W(\mu, T_A)$（ただし，$\lambda \neq \mu$) となるものがあったとしましょう．このとき，$A\boldsymbol{u}_1 = \lambda\boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{u}_2 = \lambda\boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}$ となるので，まとめて，$A(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})B$ と表されます．ここで，$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$ です．$P = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})$ とおくと，$AP = PB$ となり，$B = P^{-1}AP$ です．P の作りかた，固有ベクトルの並べかたと，B の対角成分の並びは対応しています．このように，順番が大事ですが，順番さえ気にすればよいわけです．

問．対角化する，というのは，要するに，計算しやすい形に線形変換するということですか？
答．確かにそう説明することもできます．基本的には，あくまで，「基の取り替えで，表現行列を取り替える」という考え方なのですが，上の説明のように，$AP = PB$ なので，$T_A \circ T_P = T_P \circ T_B$ という解釈も可能です．つまり，$T_B = (T_P)^{-1} \circ T_A \circ T_P$ という形に（正則行列 P を上手に選んで）A を B に変換することと見なせます．
問．固有値の話の前提として，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ おきますが，その $\boldsymbol{x}$ についての質問です．この $\boldsymbol{x}$ は基としての $\boldsymbol{x}$ なのでしょうか？ だから，$|\lambda E - A| = 0$ とおけて，計算の結果 λ が固有値となるのでしょうか？
答．$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ という条件が必要です．この条件から，固有値の条件式 $|\lambda E - A| = 0$ が導かれます．
問．固有ベクトルは，線形変換の前後で，定数倍に変化するだけですが，その特性はどういったことに役立ちますか？
答．行列を対角化（あるいは，一般には「ジョルダン標準形」とよばれる形に標準化）することに役立ちます．（量子力学では，固有ベクトルは「物理状態」固有値はその「観測値」にたとえられます．）
問．固有ベクトルは，テキストの正解と違っていても成り立ちますか？
答．固有空間の基を求める問題についてだと思いますが，その場合，基の取り方は一通りではありません．だから，正解は一通りではありません．
問．線形写像の像と核というものが理解できません．// その意味するところを詳しく教えてください．
答．線形写像の核（かく）は，その写像で「消される情報」，像（ぞう）は「生き残る情報」にたとえられます．たとえば，核は隠れる，像は残るゾウ，と覚えてください．行列との関係で言うと，核は連立方程式の解の次元，像の次元は階数，という意味がありますね．
問．部分空間に零ベクトルが含まれなければならないことの重要性がよく分かりません．
答．零ベクトルがないと，ベクトル空間にならず，考えている範囲内で自由に計算ができなくなるからです．(たとえば，スカラーの 0 をかけることができなくなります)．
問．$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ が $\mathbf{R}^n$ の部分空間となるか調べるところで，「$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ とすると，$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ よって，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$ 」とありますが，$A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0}$ と導かれるのはどうしてか，よく分かりません．
答．$\boldsymbol{x} \in W$ なので，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であり，$\boldsymbol{y} \in W$ なので，$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ だからです．ここで，$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ という定義に，$\boldsymbol{x}$ という文字を使っていることに惑わされないようにしましょう．$\boldsymbol{x}$ は，いわば「ダミー」の文字で，本質は，「A を掛けたら $\boldsymbol{0}$ になるベクトル」というところにあります．
問．テストで，「〜は，よって定理より，〜である」という解答をしたのですが，あまり点になりませんでした．教科書にある定理を説明なしに使ってはいけないのですか？「三平方の定理」などのように固有の名前がついているわけでもまかったので，「定理」としか書けませんでした．
答．こういう場合は，どんな内容の定理を用いたかをわかりやすく明示するように努力してください．「〜は，○○が××であるという定理により，〜である」という具合に．そうでないと，たとえば，テストで「定理より明らか」とだけ書いた解答が正解になってしまいます．
問．テストの答案で「説明不足」となっているものがいくつかあったのですが，どのくらい説明が必要なのかわかりません．例えば，「〜は V の基である」ことを証明するときに，〜が 1 次独立であるかどうか調べてその結果を書いていても (1) 〜は 1 次独立であるから (2) V の基である」と書く必要があるのですか？ この場合は，(1) が抜けていて (2) だけではダメですか？
答．その通りです．〜が 1 次独立であるかどうか調べてその結果を自分は書いたつもりでも，客観的に (1) のように，「1 次独立である」ということを書かないと，何を調べていたのかもわからないし，(2) を示すために (1) が必要ということをわかっているのかどうかも見えてこないからです．（たとえば，受験者がわかっていて，省略したとしても．）少し厳しいようですが，どのぐらい説明が必要か，という問の答は，「時間の許す限り詳しく」説明する，ということになります．（それが，相手にわかってもらうための最良の方法と思います．）よろしく！
問．解答の仕方について，決まりがあるのなら教えてください．
答．決まりはありません．「正しいことを丁寧にわかりやすく」書いてあれば大丈夫です．よろしく！
問．模範解答の時にテストに通用するような書き方をできたらして欲しいです．日本語をどうはさむかなど... （コメント欄にあった文章ですが，他の受講書のためにもなるので，回答します！）
答．なるほど．でも，模範解答というのは存在しないので，あくまで解答の一例，それも不完全な解答を示すことしかできません．日本語をどうはさむか，ということも，時と場合によって色々変わってくるし，それを私が指示してしまったら，「それ以外はダメなのかな」という，余計なメッセージを皆さんへ送りことになりかねず，その意味で，皆さんの「自分で考える力」を若いときに養ってもらうように，略解のみを書いています．悪しからず，よろしく！
問．中間試験の解答配布は予定されているのでしょうか？
答．予定していません．解答は一通りではない（説明の仕方も一通りではない）からです．疑問があるときは，授業後に直接質問してください．大歓迎します！ ではまた．